Corrigé du contrôle 2

Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Séries de Fourier (7 points)

On s'intéresse à un système mécanique décrit en régime libre par l'équation

$$y'(t) + y(t) = 0.$$

On lui impose une excitation f représentée par la fonction triangle 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(t) = |t|$.
L'évolution du système est alors modélisée par l'équation

$$y'(t) + y(t) = f(t).$$

Résoudre complètement cette équation différentielle. Pour en déterminer une solution particulière, on commencera par écrire f sous la forme $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$ (après avoir justifié qu'une telle écriture existe). Puis on cherchera une solution y de la même forme (on s'autorisera pour cela à dériver sous le signe somme).

Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ sont de la forme $y_h(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

Cherchons maintenant une solution particulière de la forme $y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{int}$ (en supposant que l'équation admet une solution développable en série de Fourier).

La fonction f étant continue et C^1 par morceaux, elle admet une telle décomposition, et on peut d'après le théorème de Dirichlet écrire

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int},$$

avec pour tout entier n,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Injectons tout cela dans notre équation : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ind_n \mathrm{e}^{int} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$, donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathrm{i}n + 1) d_n \mathrm{e}^{int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int}.$$

Par unicité de la décomposition en série de Fourier, nous pouvons identifier les coefficients de ces deux séries :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad (\mathrm{i}n + 1) d_n = c_n, \quad \text{donc} \quad d_n = \frac{c_n}{\mathrm{i}n + 1} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ -\frac{2}{\pi n^2 (\mathrm{i}n+1)} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons donc trouvé une solution particulière de l'équation sous forme d'une série de Fourier :

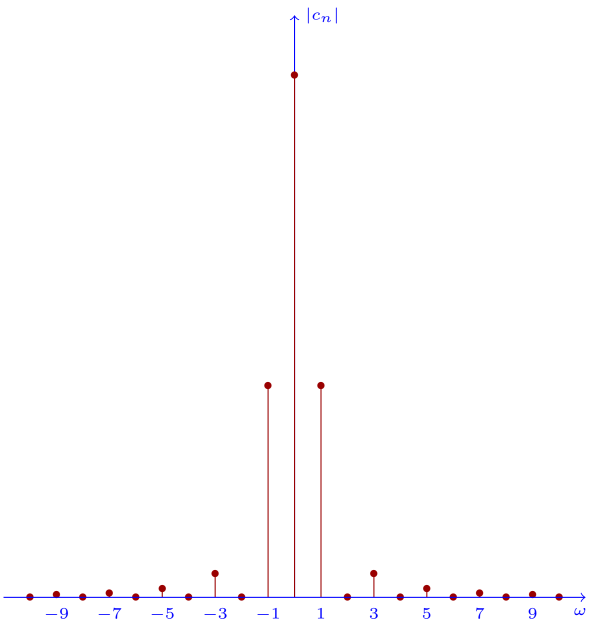
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in+1} e^{int}.$$

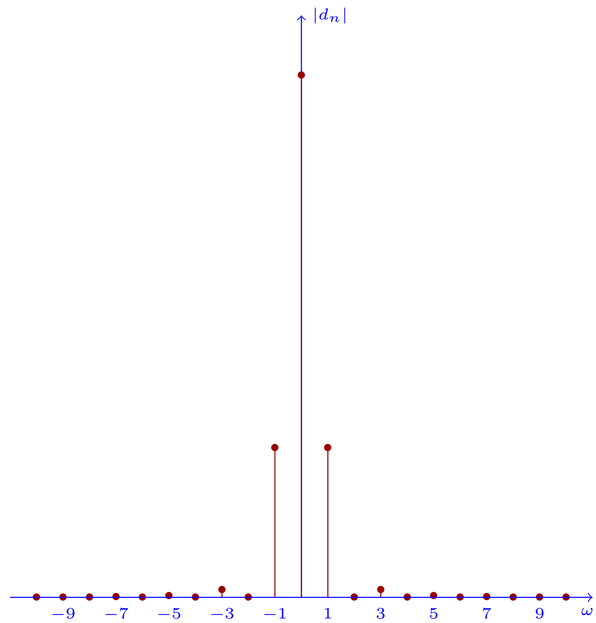
Et la solution générale du problème est donnée par $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$.

Décrire la solution générale du problème : comment évolue-t-elle au cours du temps ? Comment se répartissent ses fréquences par rapport à celles de f ? (On pourra par exemple représenter les spectres de f et de la solution particulière obtenue.)

Tout d'abord, on remarque que la solution de l'équation homogène tend vers 0 rapidement, ce qui n'est pas le cas de la solution y_p puisqu'il s'agit d'une fonction périodique. Ainsi, toutes les solutions se comportent asymptotiquement comme cette solution y_p. Elle représente donc le régime continu du système excité par la fonction f.

Étudions le spectre de y_p en fonction de celui de f. Toutes les composantes de f ont été atténuées par un facteur $\frac{1}{in+1}$. On en déduit que l'atténuation est d'autant plus forte que la fréquence considérée est élevée : le système préserve assez bien les basses fréquences de f mais atténue beaucoup ses hautes fréquences. Il se comporte donc comme un filtre passe-bas.

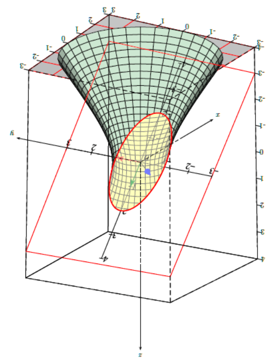




Exercice 2 : Vortex (13 points)

Le but de cet exercice est de modéliser un tourbillon, c'est-à-dire un écoulement fluide principalement en rotation autour d'un axe, puis d'en calculer le débit à travers une section.

Un joli tourbillon



Portion d'hyperboloïde et section elliptique

- Nous considérons que l'écoulement se fait à l'intérieur de l'hyperboloïde à une nappe H défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1 \quad \text{ou en coordonnées cylindriques} \quad r^2 = z^2 + 1, \quad \text{pour } z \in [0, 1].$$

- Nous notons V le volume délimité par H et les deux disques horizontaux aux hauteurs $z = 0$ et $z = 1$.
- Nous considérerons ensuite une section de V obtenue en intersectant un plan avec V. Il s'agit d'une surface S délimitée par une ellipse.

1. Calculer le volume de V et donner une paramétrisation de H.

On peut voir V comme un empilement de disque. Plus précisément, la section de V située à la hauteur z est un disque de rayon $\sqrt{z^2+1}$ et donc d'aire $\pi(z^2+1)$. Le volume de V est ainsi égal

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_{z=0}^{1} \pi(z^2+1)\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3}.$$

Pour paramétrer la surface H, on peut considérer deux paramètres, l'un pour tourner autour de H dans un plan horizontal, l'autre pour monter ou descendre sur H. Nous noterons ces paramètres θ et z. L'essentiel est de bien voir qu'à z fixé, on peut parcourir un cercle de rayon $\sqrt{z^2+1}$. Nous définissons ainsi

$$\psi(\theta, z) = (\sqrt{z^2+1}\cos(\theta), \sqrt{z^2+1}\sin(\theta), z), \qquad \theta \in [0, 2\pi[, \; z \in [0, 1].$$

On peut aussi se contenter d'une paramétrisation cartésienne

$$\psi_2(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2-1}),$$

pour (x, y) parcourant la couronne située entre les cercles de centre O de rayons 1 et $\sqrt{2}$.

2. On commence par étudier l'écoulement défini à l'intérieur de H par le champ de vitesse

$$\vec{v}_1(x, y, z) = \left(-\frac{xz}{(z^2+1)^2}, \; -\frac{yz}{(z^2+1)^2}, \; -\frac{1}{z^2+1}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{v}_1(r, \theta, z) = -\frac{rz}{(z^2+1)^2}\vec{u}_r - \frac{1}{z^2+1}\vec{u}_z.$$

(a) Montrer que $\vec{v}_1$ est à divergence nulle.

En cartésien :

$$\operatorname{div}(\vec{v}_1) = -\frac{z}{(z^2+1)^2} - \frac{z}{(z^2+1)^2} + \frac{2z}{(z^2+1)^2} = 0.$$

En cylindrique :

$$\operatorname{div}(\vec{v}_1) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \frac{r^2 z}{(z^2+1)^2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot 0 + \frac{2z}{(z^2+1)^2} = 0.$$

Le fait que la divergence soit nulle semble raisonnable si on considère que le fluide est incompréssible.

(b) Montrer que sur H, $\vec{v}_1$ est tangent à H.

On peut déterminer, à l'aide de sa paramétrisation, le plan tangent en tout point de H. Nous montrerons ensuite que les vecteurs du champ $\vec{v}_1$ sont inclus dans ces plans.
Nous utilisons la paramétrisation cartésienne :

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right), \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right).$$

Ces deux vecteurs engendrent le plan tangent à H au point $\psi_2(x, y)$. En ce point, le champ $\vec{v}_1$ est donné par

$$\vec{v}_1(\psi_2(x,y)) = \vec{v}_1(x, y, \sqrt{x^2+y^2-1}) = \left(-\frac{x\sqrt{x^2+y^2-1}}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{y\sqrt{x^2+y^2-1}}{(x^2+y^2)^2},\ -\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Il ne reste qu'à vérifier que

$$\vec{v}_1(\psi_2(x,y)) = -\frac{x\sqrt{x^2+y^2-1}}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2-1}}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial \psi_2}{\partial y}.$$

Ainsi $\vec{v}_1$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$; c'est un vecteur tangent à H.

Avec la paramétrisation ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(-\sqrt{z^2+1}\sin(\theta), \sqrt{z^2+1}\cos(\theta), 0\right), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos(\theta), \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin(\theta), 1\right).$$

Ces deux vecteurs engendrent le plan tangent à H au point $\psi(\theta, z)$. En ce point, le champ $\vec{v}_1$ est donné par

$$\vec{v}_1(\psi(\theta,z)) = \vec{v}_1(\sqrt{z^2+1}\cos(\theta), \sqrt{z^2+1}\sin(\theta), z)$$

$$= \left(-\frac{z\sqrt{z^2+1}\cos(\theta)}{(z^2+1)^2},\ -\frac{z\sqrt{z^2+1}\sin(\theta)}{(z^2+1)^2},\ -\frac{1}{z^2+1}\right).$$

Il ne reste qu'à remarquer que

$$\vec{v}_1(\psi(\theta, z)) = -\frac{1}{z^2+1}\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

La conclusion est donc la même.

(c) Représenter l'allure des lignes de champ de $\vec{v}_1$.

Il n'est pas nécessaire de calculer les lignes de champ de $\vec{v}_1$. On sait déjà que le champ est tangent à H. De plus, en coordonnées cylindriques, il n'a pas de composante en $\vec{u}_\theta$; il ne « tourne »pas autour de H. Le champ $\vec{v}_1$ glisse verticalement vers le bas le long de H. Et son allure est la même à l'intérieur de V. Nous avons ainsi modélisé un écoulement vertical de divergence nulle à l'intérieur de H.

Si on souhaite calculer les lignes de champs, le plus simple est d'utiliser la représentation cylindrique : $(r', r\theta', z')$ colinéaire à $(-\frac{rz}{(z^2+1)^2}, 0, -\frac{1}{z^2+1})$ ssi $\theta' = 0$ et $\frac{r'}{r} = \frac{z'z}{z^2+1}$ ssi $\theta = \theta_0$ et $\ln(r) = \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + c$. La première équation définit un plan vertical, la seconde est équivalente à $r^2 = \mathrm{e}^{2c}(z^2+1)$ et définit un hyperboloïde (pour $c = 0$, on retrouve H). Leur intersection est une hyperbole située dans un plan vertical.

(d) Calculer le flux de $\vec{v}_1$ à travers la section S.

Comme la section S n'a pas été définie explicitement, la question semble difficile. Nous pourrions définir un plan précis (avec une équation $ax+by+cz = d$), paramétrer la surface S correspondante puis calculer le flux à l'aide d'une intégrale double. Le plus simple est de se ramener à une surface plus simple à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski. Cela semble judicieux car la divergence de notre champs est nulle et le flux devrait donc être conservé.
Considérons par exemple le disque horizontal de centre 0 et de rayon 1. Soit $\tilde{S}$ la surface fermée délimitée par ce disque, S et l'hyperboloïde H et $\tilde{V}$ son volume intérieur. D'après GO :

$$\iint_{\tilde{S}} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S = \iiint_{\tilde{V}} \mathrm{div}(\vec{v}_1)\mathrm{d}V = 0$$

(en n'oubliant pas d'orienter la surface $\tilde{S}$ vers l'extérieur de $\tilde{V}$). D'autre part,

$$\iint_{\tilde{S}} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S = \iint_{\tilde{H}} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S + \iint_{D} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S + \iint_{S} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S,$$

où $\tilde{H}$ est la portion de H délimitant $\tilde{V}$ et D notre disque horizontal. Comme $\vec{v}_1$ est tangent à H, son flux à travers H (et donc $\tilde{H}$) est nul. Comme D est situé dans le plan $z = 0$, le champ $\vec{v}_1$ y est égal à $\vec{v}_1(x, y, 0) = (0, 0, -1)$ et est normal à D. Son flux à travers D, en tenant compte de son orientation vers le bas, est égal à $\iint_D \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S = +1 \cdot \mathcal{A}(D) = \pi$.
Finalement, on trouve le flux à travers S

$$\iint_{S} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S = \iint_{D} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}S = \pi.$$

3. Proposer un champ de vecteur $\vec{v}_2(x,y,z)$ (ou $\vec{v}_2(r,\theta,z)$) tournant autour de l'axe Oz et de divergence nulle. Justifier brièvement votre choix pour modéliser notre problème.

   On peut par exemple considérer le champ

   $$\vec{v}_2(x,y,z) = (y,x,0) \quad \text{ou} \quad \vec{v}_2(r,\theta,z) = r\vec{u}_\theta.$$

   Il s'agit bien d'un champ tournant autour de l'axe Oz, ses lignes de champ sont les cercles centrés sur Oz. Et sa divergence est bien nulle.
   Permet-il de modéliser notre tourbillon ? Cela dépend sans doute du tourbillon considéré, mais on peut tout de même décrire les propriétés de ce champ.
   Le long d'une ligne de champ, la norme de $\vec{v}_2$ reste constante (égale à r). Cela semble raisonnable, il n'y a a priori pas de raison de considérer que la vitesse peut évoluer au cours de la rotation. De plus cette vitesse est d'autant plus élevée que l'on s'éloigne de l'axe Oz. Notre écoulement se comporte comme un manège. Cela peut sembler discutable pour certains écoulements. Si on imagine par exemple que c'est une rotation de l'axe Oz qui entraîne la rotation du fluide, la vitesse devrait être plus élevée près de l'axe que loin de l'axe. On pourrait alors chercher un champ de la forme $f(r)\vec{u}_\theta$ plus satisfaisant mais toujours à divergence nulle. En fait, tant que $f(r)$ ne dépend pas de θ, la divergence est nulle et on peut donc choisir la fonction f que l'on souhaite. Par exemple :

   $$\vec{v}_2(r,\theta,z) = \frac{1}{r+1}\vec{u}_\theta.$$

   Notons que dans deux exemples, le champ ne dépend pas de z, ce qui est peut-être contestable à cause de la forme de H. Il faudrait étudier la question plus en profondeur.

4. On considère maintenant le champ $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers S.

   Par linéarité, le flux de $\vec{v}$ à travers S est égal à la somme des flux de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Le premier a été calculé et le second peut l'être de la même manière. Le champ $\vec{v}_2$ est en effet de divergence nulle et est trivialement tangent à H. On trouve ainsi

   $$\iint_S \vec{v}_2 \cdot \mathrm{d}S = \iint_D \vec{v}_2 \cdot \mathrm{d}S.$$

   Ce flux à travers D est nul car $\vec{v}_2$ étant un champ horizontal, il est tangent à D. Finalement

   $$\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}S = \pi + 0 = \pi.$$