Contrôle 2

Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : champs de vecteurs (6 pts)

Soit $\vec{\varphi}$ le champ de vecteur défini par

$$\vec{\varphi}(x,y,z) = \left(-\frac{x}{y}\ ,\ 1-\frac{1}{y+1}\ ,\ \frac{z}{y}\right)$$

et $\mathcal{C}$ le cylindre d'axe Oy de rayon 1 paramétré par

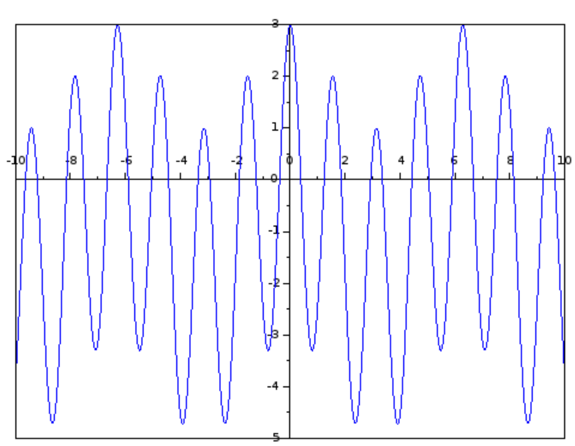
$$\psi(\theta,y) = (\cos(\theta), y, \sin(\theta)), \qquad \theta \in [0,2\pi], y \in]0,+\infty[.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons le flux du champ $\vec{\varphi}$ à travers $\mathcal{C}$.

1. (a) Soient $0 < a < b < +\infty$. Calculer le flux à travers la portion du cylindre pour laquelle $a \leqslant y \leqslant b$.
   (b) En déduire le flux de $\vec{\varphi}$ à travers $\mathcal{C}$.
2. (a) Décrire l'allure du champ $\vec{\varphi}$ lorsque $y \to 0$ et $y \to +\infty$. En déduire les flux à travers les disques délimitant le cylindre en $y = 0$ et $y = +\infty$.
   (b) En déduire le flux de $\vec{\varphi}$ à travers $\mathcal{C}$.

Exercice 2 : série de Fourier (6 pts)

1. Soient f une fonction 2π-périodique et $g(t) = f(t)e^{imt}$ où m est un entier. Exprimer les coefficients de Fourier $c_n(g)$ en fonctions des coefficients $c_n(f)$ de f.



2. On considère la fonction f ci-contre. Déterminer et représenter le spectre de f.
3. Soit $m = 10$. Représenter (en partie réelle) l'allure de la fonction g correspondante puis représenter son spectre.

Exercice 3 : transformée de Fourier (8 pts)

On considère un oscillateur harmonique en régime forcé, par exemple un ressort soumis à une excitation. L'évolution de la position du système $y(t)$ est décrite par une équation différentielle de la forme

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t),$$

où ω_0 est la fréquence propre du système et f représente la force extérieure.

1. Exprimer $\widehat{y''}(\omega)$ en fonction de $\hat{y}(\omega)$.
2. Passer à la transformée de Fourier dans l'équation différentielle et exprimer $\hat{y}$ en fonction de $\hat{f}$.
3. Représenter un spectre $\hat{f}$ quelconque puis représenter le spectre de y correspondant. Comment réagit le système en fonction de f et des fréquences qui le composent ?

   Nous allons maintenant essayer d'exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$. Nous utiliserons le fait que la transformée de Fourier de la fonction échelon $u(t)$ est donnée par $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{i\omega}$.
4. En utilisant les propriétés de linéarité et de déphasage, donner des fonctions g et h dont les transformées sont $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0}$ et $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\omega + \omega_0}$.
5. En déduire que la transformée de la fonction $\ell : t \mapsto -u(t)\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$ est donnée par $\hat{\ell}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$.
6. Exprimer la solution $y(t)$ en fonction de $f(t)$ sous forme d'un produit de convolution.

Remarque : nous avons déterminé une solution particulière, celle qui admet une transformée de Fourier. Pour obtenir la solution générale du problème, il faut ajouter les solutions de l'équation homogène.