Contrôle 2

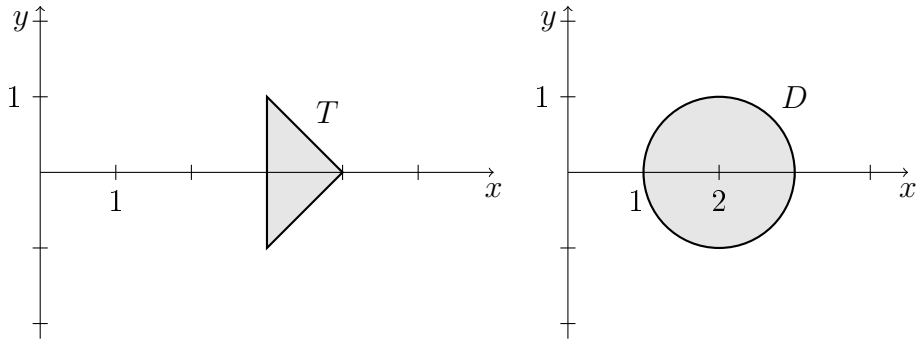
Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : girouette coudée (12 pts)

Le but de cet exercice est de déterminer la position d'équilibre d'une certaine structure fixée à un axe de rotation et soumise à un vent latéral constant.

1. **Préliminaires**

   On considère les deux surfaces T et D représentées ci-dessous dans un repère Oxy.



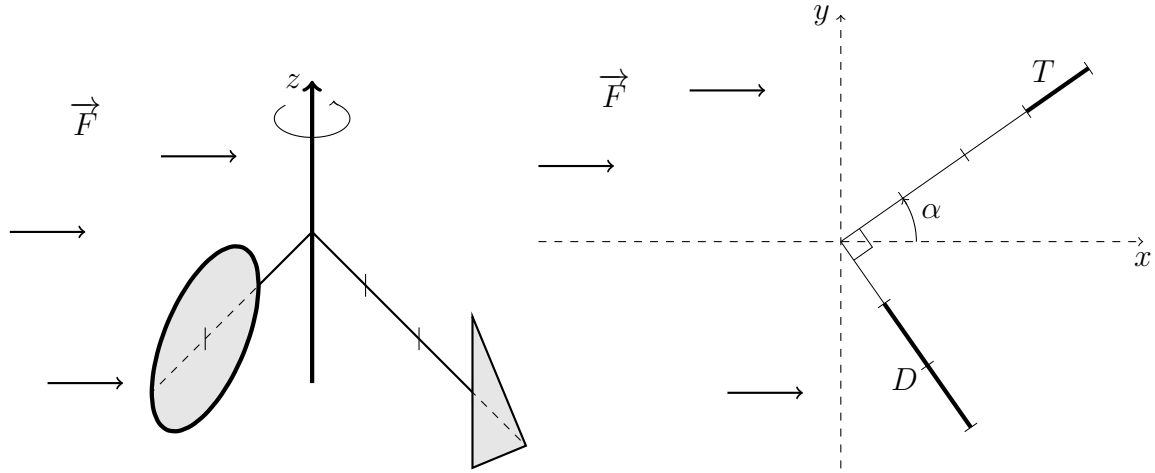
   (a) Calculer $I_T = \iint_T x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec le théorème de Fubini.

   (b) Calculer $I_D = \iint_D x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ de deux façons :
   - en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires "décalées" ;
   - en utilisant la formule de Green-Riemann appliquée à un champ $\vec{\varphi}$ bien choisi.

2. **Moment total d'une force**

   On considère le mobile constitué du triangle T et du disque D fixés à l'axe Oz par deux tiges horizontales orthogonales entre elles. Le seul mouvement possible de la structure est la rotation autour de l'axe Oz. On a représenté au dos le mobile ainsi qu'une vue du dessus. On note α l'angle que fait la tige du triangle avec l'axe Ox.

   Le mobile est soumis à un vent constant dont la force est représentée par le champ de vecteur $\vec{F}(x, y, z) = (1, 0, 0)$. On négligera l'action du vent sur les deux tiges.



On souhaite déterminer les angles α pour lesquels la position du mobile est à l'équilibre. On s'intéresse pour cela au moment de la force du vent sur le mobile et plus précisément à la partie utile de ce moment (celle qui fait tourner le mobile) : le moment par rapport à l'axe Oz. On rappelle que le moment d'une force en un point P par rapport à l'axe Oz est donné par

$$M_{\vec{F}/Oz}(P) = (\overrightarrow{P_zP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u_z},$$

où P_z désigne le projeté de P sur l'axe Oz et $\vec{u}_z$ le vecteur $(0, 0, 1)$. Si la force s'exerce sur une surface Ω, le moment total de la force par rapport à l'axe Oz est la somme de tous les moments en chaque point de Ω :

$$M_{\vec{F}/Oz} = \iint_\Omega M_{\vec{F}/Oz}(P)\mathrm{d}S.$$

(a) Montrer que le moment de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur une surface telle que T ou D est égal en valeur absolue au flux du champ $\vec{\varphi} = \rho\vec{F}$ à travers cette surface où $\rho(x, y, z)$ désigne la distance du point (x, y, z) à l'axe Oz.

(b) Exprimer le moment de $\vec{F}$ s'exerçant sur le triangle en fonction de I_T et α. Faire de même pour le moment de $\vec{F}$ s'exerçant sur le disque.

(c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles le mobile est à l'équilibre. Représenter très grossièrement les positions d'équilibre, vues du dessus.

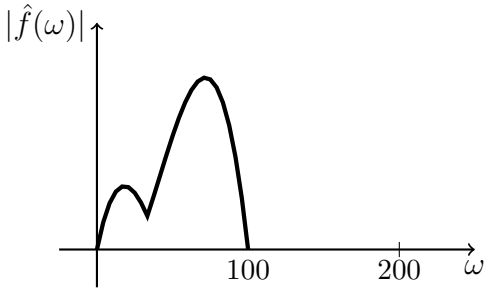
Exercice 2 : attribution d'une bande de fréquence (8 pts)

Le but de cet exercice est de comprendre comment on peut allouer à un signal donné une certaine bande de fréquence avant de l'émettre puis comment le récepteur peut ensuite récupérer le signal d'origine.

On considère un signal $f(t)$ dont les fréquences ω intéressantes sont comprises entre 0 et 100 (on ne se préoccupe pas des unités). On souhaite modifier ce signal en un autre signal dont les fréquences seraient comprises entre 200 et 210. Plus précisément, on souhaite déterminer la fonction $g(t)$ telle que

$$\forall \omega, \quad \hat{g}(\omega) = \hat{f}(10\omega - 2000).$$

1. On représente ci-contre le spectre de f, c'est-à-dire le graphe de $|\hat{f}|$.
   Représenter le spectre de g correspondant.



2. En appliquant le théorème d'inversion aux fonctions g et f, déterminer l'expression de $g(t)$ en fonction de $f(t)$.

Après avoir ainsi transformé le signal f en g, on émet ce signal g. Le récepteur capte ce signal ainsi que d'autres signaux situés sur des bandes de fréquences différentes. Pour récupérer le signal initial, il faut tout d'abord appliquer un filtre passe-bande.

3. Toujours à l'aide du théorème d'inversion, déterminer la fonction $h(t)$ telle que $\hat{h}(\omega) = \mathbf{1}_{[200,210]}$.

4. On note $\tilde{g}(t)$ le signal capté par le récepteur qui contient le signal g sur la bande de fréquence $[200, 210]$. Trouver l'opération qui permet au récepteur de récupérer le signal g puis finalement le signal f initial ?
   - $f(t) = 10e^{i2000t}\tilde{g}(10t)h(10t)$;
   - $f(t) = \frac{e^{i20t}}{10}\tilde{g}(\frac{t}{10})h(\frac{t}{10})$;
   - $f(t) = 10e^{i2000t}\ \tilde{g} * h(10t)$;
   - $f(t) = \frac{e^{i20t}}{10}\ \tilde{g} * h(\frac{t}{10})$;

   Justifier votre réponse. Le symbole $*$ désigne le produit de convolution de deux fonctions.

Remarque : le fonctionnement des bandes FM et AM n'est pas le même que celui proposé dans cet exercice mais on y retrouve le même genre d'idées.