

# CONTRÔLE 2

*Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.  
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.  
Le barème est donné à titre indicatif.*

Des intégrales :  $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = 3\pi$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 d\theta = 5\pi$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta (1 + \cos \theta) (\theta + \sin \theta) d\theta = \frac{5\pi}{2}$ .

Une primitive pour l'exercice 2 :  $\int x^2 e^{-i\omega x} dx = \frac{e^{-i\omega x}}{i\omega^3} (-\omega^2 x^2 + 2i\omega x + 2)$ .

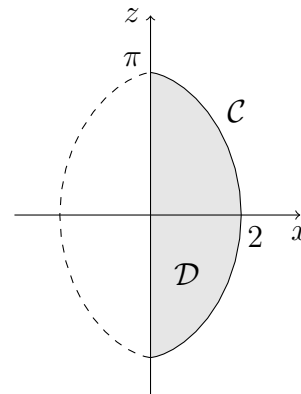
## Exercice 1 : volume d'un solide cycloïdal (12 points)

Le but de cet exercice est de calculer de trois manières différentes le volume du solide de révolution engendré par un arc de cycloïde.

On considère l'arc de cycloïde représenté ci-contre que l'on peut paramétrer par

$$\gamma(\theta) = (1 + \cos \theta, \theta + \sin \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Nous noterons  $\mathcal{D}$  le domaine situé entre cette courbe et l'axe  $Oz$  et nous noterons  $\mathcal{C}$  la courbe délimitant  $\mathcal{D}$ . En faisant tourner la courbe autour de l'axe  $Oz$ , on définit un solide de révolution que nous noterons  $\mathcal{F}$ .



### 1. 1ère méthode : rotation du centre de gravité

Une propriété générale des solides de révolution (que nous ne justifierons pas ici) affirme que le volume de  $\mathcal{F}$  est donné par la formule :

$$\mathcal{V}(\mathcal{F}) = 2\pi x_G \times \mathcal{A}(\mathcal{D}),$$

où  $x_G$  désigne l'abscisse du centre de gravité  $G$  de  $\mathcal{D}$ .

(a) Déterminer l'aire  $\mathcal{A}(\mathcal{D})$  de  $\mathcal{D}$ .

(b) Justifier l'égalité suivante en précisant l'orientation de  $\mathcal{C}$  :  $\iint_{\mathcal{D}} x dx dy = \int_{\mathcal{C}} \frac{x^2}{2} dy$ .

(c) Déterminer les coordonnées  $x_G$  et  $z_G$  du centre de gravité de  $\mathcal{D}$ .

(d) En déduire le volume de  $\mathcal{F}$ .

(e) Question bonus : proposer une interprétation/justification de la formule proposée.

### 2. 2ème méthode : intégrale triple

Les solide  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des points  $(x, y, z)$  de la forme

$$x = r(1 + \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = r(1 + \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = \theta + \sin \theta,$$

pour  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

(a) Calculer le jacobien associé à ce changement de variable.

(b) En déduire le volume de  $\mathcal{F}$ .

3. 3ème méthode : calcul d'un flux

Le bord  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{F}$  est une surface paramétrée par

$$\psi(\theta, \varphi) = ((1 + \cos \theta) \cos \varphi, (1 + \cos \theta) \sin \varphi, \theta + \sin \theta).$$

Soit  $\vec{X}$  le champ de vecteur  $\vec{X}(x, y, z) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3})$ .

(a) Montrer que le volume de  $\mathcal{F}$  est égal au flux de  $\vec{X}$  à travers  $\mathcal{S}$ .

(b) Calculer ce flux.

*Il n'y a pas de méthode simple ici, il faut utiliser la définition du flux.*

## Exercice 2 : propagation d'onde (8 points)

On considère un problème de propagation d'ondes. L'équation ci-dessous est un modèle simplifié permettant de décrire le mouvement des vagues lorsque le fond est peu profond.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

$y(x, t)$  représentant la hauteur de la vague en  $x \in \mathbf{R}$  à l'instant  $t$ .

On s'intéresse plus particulièrement aux ondes qui se propagent sans se déformer. Il s'agit des solutions de l'équation de la forme  $y(x, t) = f(x - vt)$  où  $v$  représente la vitesse de propagation.

1. Soit  $\omega \in \mathbf{R}^*$ . Déterminer  $v$  tel que  $f_\omega(x, t) = e^{i\omega(x-vt)}$  soit solution de l'équation.
2. Nous allons représenter les parties réelles de deux solutions à différents instants.  
Posons  $\omega = 1$  et  $v$  la vitesse correspondante. Représenter le graphe de la fonction  $x \mapsto \cos(\omega(x - vt))$  aux instants  $t = 0$  et  $t = \frac{1}{2}$ .  
Faire de même avec  $\omega = 2$ .
3. On considère la fonction  $f_0(x) = 4e^{ix} - 7e^{3ix}$ . En utilisant le principe de superposition et les résultats précédents, donner la solution  $f(x, t)$  du problème égale à  $f_0(x)$  pour  $t = 0$ .  
(On admet que cette solution est unique.)  
Cette solution se déforme-t-elle au cours du temps ?
4. Considérons maintenant une vague isolée dont la forme initiale est donnée par une fonction  $x \mapsto g_0(x)$ .  
En appliquant le théorème d'inversion à  $g_0$ , donner l'expression de la solution  $g(x, t)$  correspondante.
5. Comment va évoluer la forme de la vague au cours du temps ? Qu'appelle-t-on la dispersion d'une onde ?
6. Application numérique : on considère la fonction  $g_0(x) = (4 - x^2)\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$ .  
Calculer sa transformée de Fourier et donner l'expression de la solution correspondante.