CONTRÔLE 2

Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Séries de Fourier (7 points)

Soit f une fonction 2-périodique continue et C^1 par morceaux. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = f(t). \qquad (E)$$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier. Quel lien y a-t-il entre f et sa série de Fourier ?

   On note dans la suite $t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi n t}$ la série de Fourier de f.
2. Montrer qu'une solution de l'équation (E) est nécessairement de classe C^1.
3. On cherche à déterminer une solution 2-périodique de (E). On l'écrit sous la forme $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\pi n t}$.
   Déterminer les coefficients d_n en fonction des coefficients c_n de f. On s'autorisera à dériver sous le signe somme.

   Pour conclure cette question, il faudrait vérifier que la solution y ainsi obtenue est bien dérivable et qu'elle est solution de (E), mais cela n'est pas demandé ici.
4. Application : donner l'ensemble des solutions de (E) pour la fonction 2-périodique f définie sur $[-1, 1]$ par $f(t) = |t|$.

Exercice 2 : Filtrage (5 points)

Soit $a > 0$ et soit h la fonction dont la transformée de Fourier est $\hat{h}(\nu) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(\nu)$.

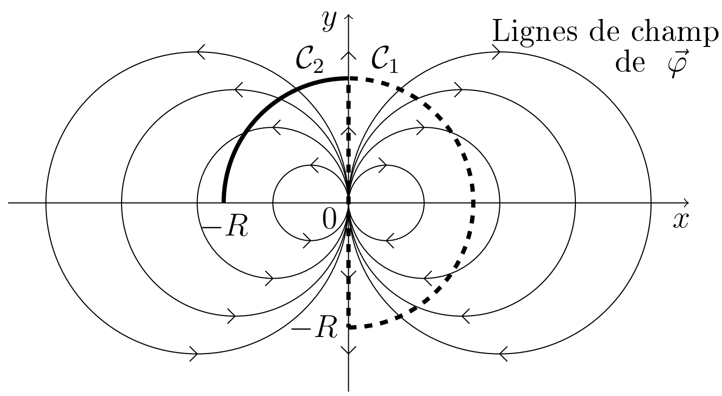
1. Déterminer h en appliquant la formule du théorème d'inversion.
2. Soit f une fonction intégrable et $g = f * h$.
   Exprimer $\hat{g}$ en fonction de $\hat{f}$.
3. Représenter un graphe quelconque pour la transformée $\hat{f}$ puis représenter la transformée $\hat{g}$ correspondante.
   Quelle est l'action sur f de la convolution par h ?

Exercice 3 : Champ de vecteurs (8 points)

On considère de nouveau le champ étudié lors du premier contrôle. Il est de norme constante égale à 1 et ses lignes de champ sont l'axe Oy et les cercles centrés sur l'axe Ox passant par O.

Il est défini en coordonnées cartésiennes par $\forall(x,y) \neq (0,0)$,

$$\vec{\varphi}(x,y) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right).$$



Soit $R > 0$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R. On note $\mathcal{C}_1$ la courbe fermée formée par le demi-cercle de $\mathcal{C}$ situé dans le demi-plan $x \geq 0$ et le segment $[-R, R]$ sur l'axe Oy. On note D_1 la partie bornée de $\mathbf{R}^2$ délimitée par $\mathcal{C}_1$.

On note $\mathcal{C}_2$ le quart de cercle de $\mathcal{C}$ situé dans le quart de plan $x < 0, y > 0$. On note D_2 la partie bornée du quart de plan $x < 0, y > 0$ délimitée par $\mathcal{C}_2$.

1. À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales

$$\iint_{D_1} \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \iint_{D_2} \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. À l'aide de la formule de Green-Riemann, calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long de la courbe $\mathcal{C}_1$.

   On a défini le flux à travers une surface d'un champ défini dans l'espace. En dimension 2, il est facile de définir de façon analogue le flux à travers une courbe d'un champ défini dans le plan. Il s'agit de mesurer la « quantité »du champ qui traverse la courbe. Le flux d'un champ $\vec{\varphi}$ à travers une courbe $\mathcal{C}$ est ainsi donné par $\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}s}$ où $\vec{\mathrm{d}s}$ désigne un vecteur élément de longueur normal à $\mathcal{C}$ en tout point.
   On peut le calculer à l'aide de la formule de Green-Ostrogradski qui s'écrit dans ce cadre ainsi :

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}s} = \iint_D \mathrm{div}(\vec{\varphi})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

   où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée entourant le domaine D et tous les vecteurs $\vec{\mathrm{d}s}$ sont dirigés vers l'extérieur de D.

3. Calculer le flux de $\vec{\varphi}$ à travers $\mathcal{C}_2$.
4. Que vaut le flux de $\vec{\varphi}$ à travers $\mathcal{C}_1$?