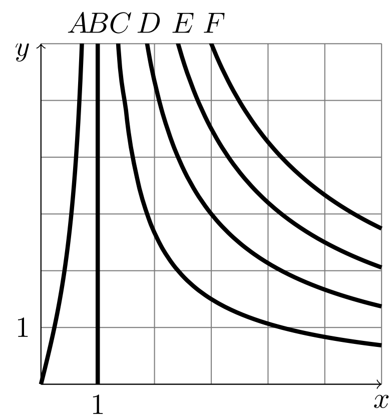
Contrôle 1

Le seul document autorisé est une feuille A4 manuscrite.
La calculatrice est interdite.

On considère un fluide dont le mouvement est décrit par son champ de vitesse. Le but de cet exercice est de décrire le mouvement des particules de ce fluide est en particulier de décrire leur position après un certain temps.

Les cinq parties sont indépendantes, sauf la quatrième qui utilise les résultats des parties précédentes.

I. Courbes de niveau (2 points)



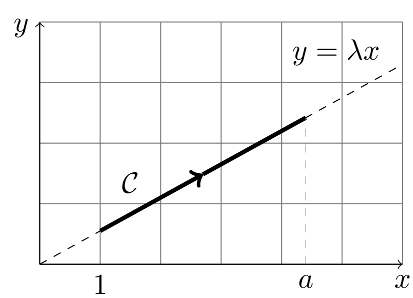
On considère la fonction f définie sur $(\mathbf{R}_+^*)^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{2} - \frac{y}{2x}.$$

Nous avons représenté ci-contre des courbes de niveau de f.

Parmi elles, lesquelles correspondent aux valeurs de f suivantes : -2, 0 et 2 ? Justifier vos choix.

II. Circulation d'un champ (3 points)



Soit $\quad \vec{\varphi}(x,y) = \left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \, , \, \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \right),$

et le segment de droite $\mathcal{C}$ d'équation $y = \lambda x$ pour x compris entre 1 et a.

Calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long de $\mathcal{C}$.

III. Champ de vitesse (5 points)

On s'intéresse à un fluide en mouvement dans le quart de plan $(\mathbf{R}_+^*)^2$. Son champ de vitesse est donné par

$$\vec{v}(x,y) = \left(\frac{1}{y} \, , \, \frac{1}{x} \right).$$

1. Le champ $\vec{v}$ est-il à flux conservatif ?
2. Représenter le champ $\vec{v}$ aux points $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(4,2)$ et $(2,4)$.
3. Déterminer les lignes de champ de $\vec{v}$ et les représenter sur la figure précédente.
   es lignes de champs sont les courbes paramétrées $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ telles qu'en tout point, $\vec{\gamma}'(t)$ est colinéaire à $\vec{v}(\gamma(t)$, autrement dit, (x', y') est colinéaire à $(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$. On obtient la relation
   $$\frac{x'}{1/y} = \frac{y'}{1/x}, \qquad i.e. \quad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}.$$

On intègre : $\ln(y) = \ln(x) + c$ (x et y sont positifs sur le domaine d'étude de $\vec{v}$). Donc $y = \lambda x$ avec $\lambda = \exp(c)$.
Les lignes de champ de $\vec{v}$ sont des demi-droites passant partant de l'origine (voir figure ci-dessus).

IV. Déplacement de particules (4 points)

On considère à l'instant $t = 0$ les particules du fluide situées sur la droite d'équation $x = 1$. On souhaite déterminer leur position à l'instant $t = 2$.

La particule située initialement au point $(1, \lambda)$ se déplace durant cet intervalle de temps le long de la ligne de champ $\mathcal{C}_\lambda$ passant par $(1, \lambda)$. Le temps écoulé est donné par l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}_\lambda} \frac{1}{\|\vec{v}\|} \mathrm{d}\ell.$$

1. Justifier que cette intégrale est égale à la circulation du champ $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ le long de $\mathcal{C}_\lambda$.
2. Justifier que son expression est donnée par les résultats des question III-3 et II. Déterminer l'expression de a en fonction de λ pour laquelle cette intégrale est égale à 2.
3. En déduire que la particule située initialement en $(1, \lambda)$ est, au bout d'un temps $t = 2$, située en $\left(\sqrt{\frac{4}{\lambda} + 1}\ ,\ \lambda\sqrt{\frac{4}{\lambda} + 1}\right)$.
4. Vérifier que ces points finaux appartiennent tous à une même courbe de niveau de f.

Le graphe de la partie I. nous permet donc de visualiser la position des particules à l'instant $t = 2$, ainsi qu'à d'autres instants. Nous observons ainsi le mouvement d'ensemble des particules situées initialement à l'abscisse $x = 1$.

IV. Champs en coordonnées polaires (6 points)

On définit maintenant les champs de vitesse suivants en coordonnées polaires :

$$\vec{v}_1(r,\theta) = (0,1) = \vec{u}_\theta, \qquad \vec{v}_2(r,\theta) = (0,r) = r\vec{u}_\theta, \qquad \vec{v}_3(r,\theta) = (0,r^2) = r^2\vec{u}_\theta$$

1. Représenter dans le plan l'allure de ces trois champs.
2. Déterminer et représenter leurs lignes de champs.
3. On considère à l'instant initial les particules situées sur l'axe des abscisses pour $x > 0$. Pour chacun des champs de vitesse $\vec{v}_i$, imaginer sans calcul le mouvement des particules correspondant et représenter leur position à différents instants.