Contrôle 1

Le polycopié de cours est autorisé. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : lignes de champ et courbes de niveau

Soit $\vec{\varphi}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ par $\vec{\varphi}(x,y) = \left(\dfrac{1}{x}, -2y\right)$.

1. Représenter dans le plan quelques vecteurs de ce champ.
2. Déterminer ses lignes de champ et les représenter.
3. Montrer que $\vec{\varphi}$ est un champ de gradient et en déterminer un potentiel f défini sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.
4. Déterminer les courbes de niveau de f et en représenter quelques-unes.
5. On considère la parabole P d'équation $x - y^2 = 0$. Déterminer les points de P en lesquels f est maximale.

Exercice 2 : champ en coordonnées polaires

Soit $\vec{\psi}$ le champ de vecteurs défini dans la base des coordonnées polaires par

$$\vec{\psi}(r,\theta) = (\sin(\theta), -\cos(\theta)) = \sin(\theta)\vec{u}_r - \cos(\theta)\vec{u}_\theta.$$

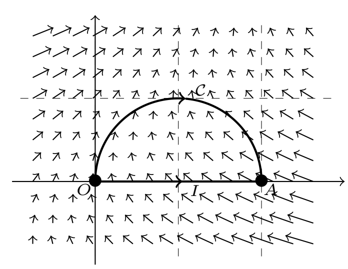
1. Quelle est la norme des vecteurs du champ $\vec{\psi}$?
2. Représenter les vecteurs de ce champ sur les axes ainsi que sur les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.
3. Déterminer les équations polaires de ses lignes de champ. S'agit-il de courbes fermées ?
4. Récrire les équations obtenues en coordonnées cartésiennes et identifier les lignes de champ de $\vec{\psi}$.
5. Représenter leur allure sur votre figure.

Exercice 3 : circulation nulle

On considère le champ de vecteur

$$\vec{\varphi}(x,y) = (y - x, 1)$$

et les points $O = (0,0)$ et $A = (2,0)$. On s'intéresse à la circulation de $\vec{\varphi}$ le long des chemins reliant O à A.



1. Calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long du segment I allant de O à A.
2. Calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long du demi-cercle $\mathcal{C}$.
3. Le champ $\vec{\varphi}$ est-il un champ de gradient ?
4. On souhaite déterminer un chemin allant de O à A pour lequel la circulation de $\vec{\varphi}$ est nulle. On se donne un chemin paramétré par $\gamma(t) = (t, f(t))$ avec $t \in [0,2]$ et f une fonction dérivable telle que $f(0) = f(2) = 0$.
   Calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long d'un tel chemin.
   Déterminer une condition sur f pour que cette circulation soit nulle.
   Donner un exemple de chemin satisfaisant cette condition.