Corrigé du contrôle 1

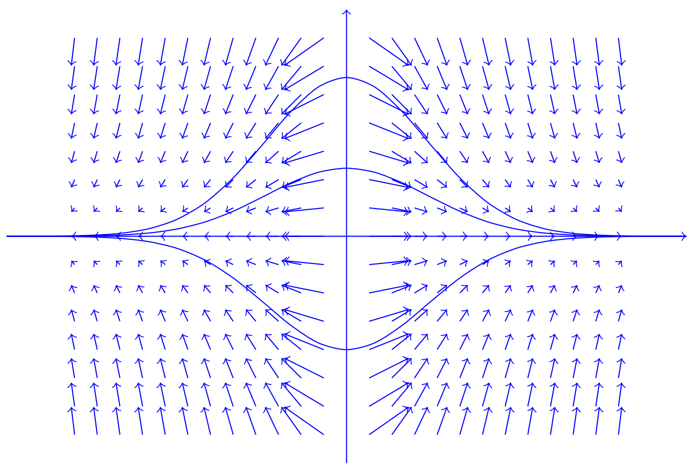
Le polycopié de cours est autorisé. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : lignes de champ et courbes de niveau

Soit $\vec{\varphi}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ par $\vec{\varphi}(x,y) = \left(\frac{1}{x}, -2y\right)$.

1. Représenter dans le plan quelques vecteurs de ce champ.

   Nous représentons ci-dessous le champ de vecteur ainsi que quelques lignes de champ.



2. Déterminer ses lignes de champ et les représenter.

   On cherche les courbes paramétrées $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ telles que pour tout t, $\vec{\gamma}'(t)$ est colinéaire à $\vec{\varphi}(\gamma(t))$. On obtient la relation $\frac{x'}{1/x} = \frac{y'}{-2y}$, donc $xx' = -\frac{y'}{2y}$. Intégrons : $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln(|y|) + c$ et finalement $y = \pm e^{-x^2-c} = \lambda e^{-x^2}$ (avec $\lambda = \pm e^c$). Les lignes de champs de $\vec{\varphi}$ sont donc des courbes de Gauss.

3. Montrer que $\vec{\varphi}$ est un champ de gradient et en déterminer un potentiel f défini sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$..

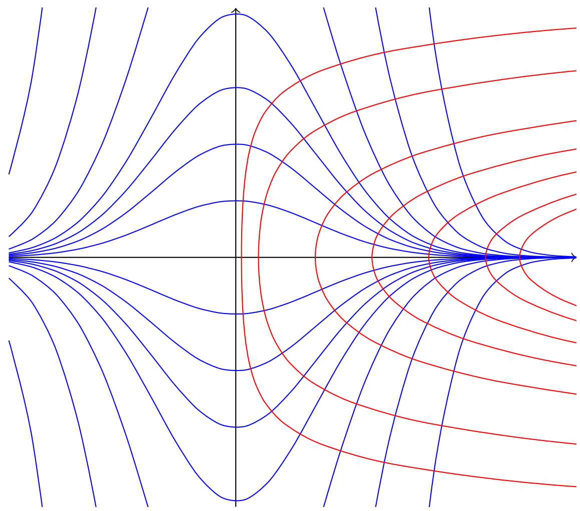
   Tout d'abord, $\frac{\partial 1/x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial(-2y)}{\partial x}$. Ainsi la condition liée au lemme de Schwarz est satisfaite et on peut en déduire que $\vec{\varphi}$ est un champ de gradient. Plus précisément $\vec{\varphi}$ admet un potentiel sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et sur $\mathbf{R}_-^* \times \mathbf{R}$ mais il n'est pas possible de recoller ces potentiels puisque $\vec{\varphi}$ n'est pas défini sur l'axe Ox.

   En intégrant les coordonnées du champ, on peut trouver facilement un tel potentiel. Par exemple $\vec{\varphi} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ avec f défini sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ par

   $$f(x,y) = \ln(x) - y^2.$$

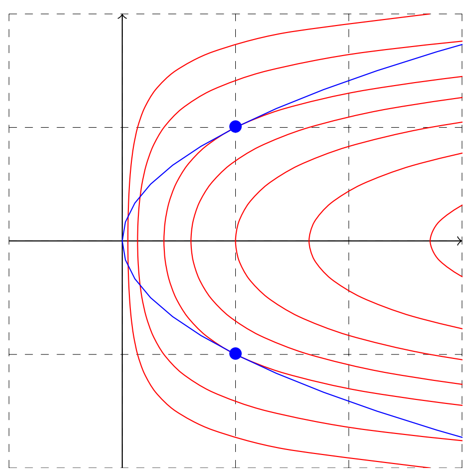
4. Déterminer les courbes de niveau de f et en représenter quelques-unes.

Les courbes de niveau de f sont les courbes d'équation $\ln(x) - y^2 = d$ avec $d \in \mathbf{R}$, soit en passant à l'exponentielle $x = \mu e^{y^2}$ avec $\mu = e^d$. Nous représentons ci-dessous des lignes de champ de $\vec{\varphi}$ et des courbes de niveau de f. Comme $\vec{\varphi}$ est le gradient de f, ces courbes sont naturellement orthogonales.



5. On considère la parabole P d'équation $x - y^2 = 0$. Déterminer les points de P en lesquels f est maximale.

La parabole est définie par l'équation $g(x, y) = 0$ où g est définie par $g(x, y) = x - y^2$. D'après le théorème des extrema liés, si la fonction f admet un extremum en un point de P, alors les gradient de f et de g sont colinéaires en ce point. On cherche donc un point (x, y) de P tel que les vecteurs $(\frac{1}{x}, -2y)$ et $(1, -2y)$ sont colinéaires. On obtient sans difficulté que $x = 1$. Et comme (x, y) est un point de P, on a $y^2 = x = 1$, donc $y \pm 1$. Si f admet un extremum sur P, c'est en $(1, 1)$ ou en $(1, -1)$. En ces deux points, la valeur de notre fonction f est -1 et l'étude des variations de f (ne serait-ce qu'avec nos figures) nous permet d'affirmer qu'il s'agit de maxima de f en restriction à P.



Exercice 2 : champ en coordonnées polaires

Soit $\vec{\psi}$ le champ de vecteurs défini dans la base des coordonnées polaires par

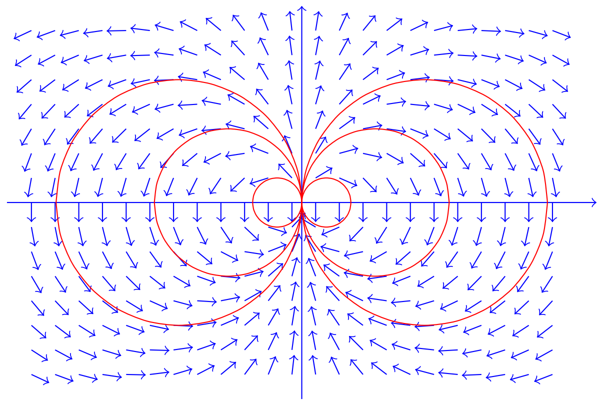
$$\vec{\psi}(r, \theta) = (\sin(\theta), -\cos(\theta)) = \sin(\theta)\vec{u}_r - \cos(\theta)\vec{u}_\theta.$$

1. Quelle est la norme des vecteurs du champ $\vec{\psi}$?

La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est une base orthonormée et la norme du vecteur $\vec{\psi}(r,\theta)$ est simplement donnée par $\|\vec{\psi}(r,\theta)\| = \sqrt{\sin^2(\theta) + (-\cos(\theta))^2} = 1$.

2. Représenter les vecteurs de ce champ sur les axes ainsi que sur les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

   Voici l'allure générale du champ $\vec{\psi}$. Les vecteurs sont verticaux sur les axes et horizontaux sur les droites d'équations $y = \pm x$.



3. Déterminer les équations polaires de ses lignes de champ. S'agit-il de courbes fermées ?

   On cherche les courbes paramétrées $(r(t), \theta(t))$ en polaire telles que $(r', r\theta')$ est colinéaire à $(\sin(\theta), -\cos(\theta))$ en tout point. On obtient l'équation

$$\frac{r'}{r} = -\frac{\theta' \sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

   On intègre : $\ln(r) = \ln(|\cos(\theta)|) + c$. On passe à l'exponentielle : $r = \lambda|\cos(\theta)|$ avec $\lambda = \mathrm{e}^c$.

   On remarque que $|\cos(\theta)|$ est périodique : la valeur de r est la même lorsque $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$. Cela signifie que la courbe se referme après avoir fait un tour. Les lignes de champs sont donc des courbes fermées.

4. Récrire les équations obtenues en coordonnées cartésiennes et identifier les lignes de champ de $\vec{\psi}$.

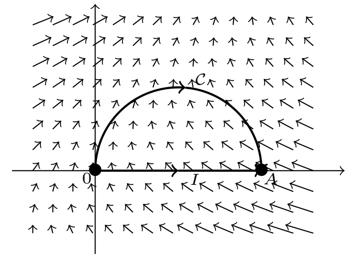
   Pour passer en coordonnées cartésiennes, utilisons le fait que $r^2 = x^2 + y^2$ et $x = r\cos(\theta)$. Notre équation devient $x^2 + y^2 = \lambda|x|$. On peut la factoriser sous la forme

$$\left(x \pm \frac{\lambda}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4},$$

   le $\pm$ étant lié au signe de x. On reconnaît l'équation du cercle de centre $(\pm\frac{\lambda}{2}, 0)$ de rayon $\frac{\lambda}{2}$. On en déduit que les lignes de champ sont les cercles centrés sur l'axe Ox et passant par l'origine.

5. Représenter leur allure sur votre figure.

Exercice 3 : circulation nulle



On considère le champ de vecteur

$$\vec{\varphi}(x,y) = (y - x, 1)$$

et les points $O = (0,0)$ et $A = (2,0)$. On s'intéresse à la circulation de $\vec{\varphi}$ le long des chemins reliant O à A.

1. Calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long du segment I allant de O à A.

   On paramètre le chemin I (en respectant l'orientation) par $\gamma_1(t) = (t, 0)$ avec $t \in [0,2]$. Ainsi
   $$\int_I \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^2 <(-t,1)|(1,0)>\mathrm{d}t = \int_0^2 -t\mathrm{d}t = -2.$$

2. Calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long du demi-cercle $\mathcal{C}$.

   On paramètre le chemin $\mathcal{C}$ (en respectant l'orientation) par $\gamma_2(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t))$ avec $t \in [\pi, 0]$. Ainsi
   $$\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_\pi^0 <(\sin(t) - \cos(t) - 1, 1)|(-\sin(t), \cos(t))>\mathrm{d}t$$
   $$= \int_\pi^0 -\sin^2(t) + \cos(t)\sin(t) + \sin(t) + \cos(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 2.$$

3. Le champ $\vec{\varphi}$ est-il un champ de gradient ?

   Si $\vec{\varphi}$ était un champ de gradient, alors sa circulation le long d'un chemin ne dépendrait que des extrémités du chemin. En particulier les deux circulations précédentes seraient égales. Ce n'est pas le cas donc $\vec{\varphi}$ n'est pas un champ de gradient. (On peut aussi vérifier que les conditions du lemme de Schwarz ne sont pas satisfaites.)

4. On souhaite déterminer un chemin allant de O à A pour lequel la circulation de $\vec{\varphi}$ est nulle. On se donne un chemin paramétré par $\gamma(t) = (t, f(t))$ avec $t \in [0,2]$ et f une fonction dérivable telle que $f(0) = f(2) = 0$.
   Calculer la circulation de $\vec{\varphi}$ le long d'un tel chemin.
   Déterminer une condition sur f pour que cette circulation soit nulle.
   Donner un exemple de chemin satisfaisant cette condition.

   La circulation le long d'un tel chemin est donnée par
   $$\int \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^2 <(f(t) - t, 1)|(1, f'(t))>\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t) - t + f'(t)\ \mathrm{d}t$$
   $$= \left(\int_0^2 f\right) - 2 + [f(2) - f(0)] = \left(\int_0^2 f\right) - 2.$$
   Ainsi cette circulation est nulle ssi $\int_0^2 f = 2$. On peut considérer par exemple la courbe affine par morceaux allant du point O au point $(1,2)$ puis au point A. Elle définit bien une fonction d'intégrale 2 et sa circulation est donc nulle. Elle présente néanmoins le

défaut de ne pas être dérivable en tout point.
On peut proposer la fonction $f(t) = 3t - \frac{3}{2}t^2$ qui définit une parabole d'aire 2 et la circulation sera donc aussi nulle.