Contrôle 1

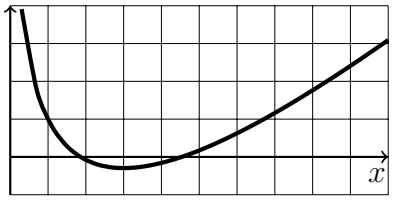
Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.

Exercice 1 : Lotka-Voltera

Soit $\vec{\varphi}$ le champ de vecteur défini pour $x > 0$ et $y > 0$ par

$$\vec{\varphi}(x, y) = (\ x(2 - y)\ ,\ y(x - 3)\ ).$$

1. Déterminer la direction des vecteurs $\vec{\varphi}(x, y)$ (vers le bas et la droite par exemple) en fonction des valeurs de x et y.
2. Représenter grossièrement l'allure de ce champ de vecteur. Quelle peut être l'allure des lignes de champs ? *On distinguera plusieurs possibilités.*
3. Déterminer les équations des lignes de champ de $\vec{\varphi}$.
4. On donne le graphe de la fonction $x \mapsto x - 3\ln(x)$. À l'aide de ce graphe, montrer que pour tout y_0, il ne peut y avoir sur une ligne de champ qu'au plus deux points situés à l'ordonnée y_0. En déduire que les lignes de champ de $\vec{\varphi}$ sont fermées.



Exercice 2 : Moment cinétique

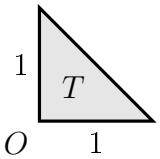
On considère un disque D de rayon R en rotation autour de son centre O avec une vitesse angulaire constante ω. On le suppose de plus homogène de masse surfacique m. On souhaite calculer le moment cinétique global du disque par rapport à ce point.

On rappelle que le moment cinétique d'un point M par rapport à O est donné par $\vec{L}(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$ où $\vec{v}(M)$ désigne la vitesse du point M.

Comme tout se passe dans un plan, les vecteurs $\vec{L}(M)$ seront tous dirigés selon un même axe et nous ne nous intéresserons finalement qu'à leur norme. Le moment cinétique total recherché est alors

$$L(D) = \iint_D \|\vec{L}(M)\| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

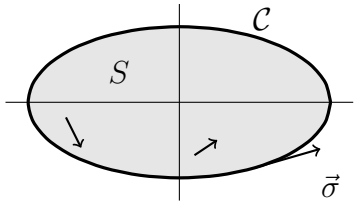
1. Faire une figure avec un repère contenant le disque D, un point M quelconque du disque et les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)$.
2. Pour un point M dans ce repère, exprimer les coordonnées des vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)$.
3. Calculer le moment cinétique total du disque.
4. On considère le triangle T, rectangle en O, de côté 1, qu'on suppose homogène et en rotation autour de O. Calculer son moment cinétique total $L(T)$.



Exercice 3 : Torsion d'une poutre

On considère une poutre encastrée d'un côté et libre de l'autre, de section S délimitée par une courbe $\mathcal{C}$, soumise à des contraintes mécaniques. On lui applique un moment de torsion autour de l'axe de la poutre.

Sur une section, les contraintes de cisaillement sont décrites par un vecteur de contraintes $\vec{\sigma}(x,y) = (\sigma_x, \sigma_y)$. On suppose qu'il existe une fonction de torsion $f(x,y)$ de classe C^2 telle que $\sigma_x = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\sigma_y = -\dfrac{\partial f}{\partial x}$.



1. Montrer que $\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$.

Cette équation correspond à l'équilibre des contraintes. D'autres contraintes physiques permettent d'établir d'autres équations, en particulier l'équation de Poisson : $\Delta f = \text{cste}$.
En plus de ces équations décrivant le comportement interne de la poutre, il y a une condition au bord : la surface est "traction-free", ce qui se traduit par un cisaillement tangent à la surface de la poutre. Autrement dit, sur le contour $\mathcal{C}$, le vecteur $\vec{\sigma}$ est tangent à $\mathcal{C}$.

2. Vérifier que les vecteurs $\vec{\sigma}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f$ sont orthogonaux en tous points.
3. En déduire que $\mathcal{C}$ est une courbe de niveau de f.

Ainsi, f est constante sur $\mathcal{C}$. Comme f joue un rôle analogue à un potentiel, on peut supposer , sans perte de généralité, que cette constante est nulle. En ajoutant l'équation de Poisson, on obtient un problème du type de Dirichlet.

4. Un exemple : dans le cas où la section S est le disque unité, trouver une fonction $f(x,y)$ simple telle que $\Delta f = 4$ sur S et $f = 0$ sur le cercle unité.

Terminons avec une formule permettant de calculer, à l'aide de notre « potentiel »f, le moment de torsion de la poutre. Sa norme est donnée, pour notre section S, par

$$\|\vec{m}\| = \left| \iint_S (x\sigma_y - y\sigma_x) \mathrm{d}S \right|.$$

Nous utiliserons la formule de Green-Ostrogradski, adaptée à la 2D : pour tout champ $\vec{\varphi}$,

$$\iint_S \mathrm{div}(\vec{\varphi}) \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}n},$$

où $\vec{\mathrm{d}n}$ désigne un vecteur normal à $\mathcal{C}$ infinitésimal.

5. Posons $\vec{\varphi}(x,y) = (\ xf(x,y)\ ,\ yf(x,y)\ )$. Calculer $\mathrm{div}(\vec{\varphi})$.
6. En utilisant le fait que f est nulle sur $\mathcal{C}$, conclure que $\|\vec{m}\| = \left| \iint_S 2f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right|$.

L'appliquer à la fonction obtenue en 4.