Contrôle 1

Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

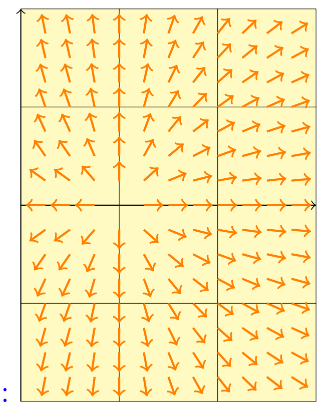
Exercice 1 (5 pts)

Soit $\vec{\varphi}$ le champ de vecteur défini sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ par

$$\vec{\varphi}(x,y) = (x\ln(x)\ ,\ y).$$

1. Représenter l'allure de $\vec{\varphi}$.

   Sans tenir compte des normes, le champ $\vec{\varphi}$ ressemble à cela :



2. Déterminer ses lignes de champ et les représenter.
   (On reconnaîtra éventuellement la dérivée de $\ln(\ln)$*.)*

   On cherche $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tel que : $\forall t,\ \vec{\gamma}'(t)$ est colinéaire à $\vec{\varphi}(\gamma(t))$. Donc $x'y - y'x\ln(x) = 0$ et $\frac{x'}{x\ln(x)} = \frac{y'}{y}$. On intègre : $\ln(|\ln(x)|) = \ln(|y|) + \mu$. Puis on passe à l'exponentielle : $y = \lambda\ln(x)$ avec $\lambda = \pm e^{-\mu}$. Les lignes de champs de $\vec{\varphi}$ sont donc des courbes logarithmiques partant toutes du point $(1,0)$.

3. Le champ $\vec{\varphi}$ est-il un champ de gradient ?

   Appliquons le critère du lemme de Schwarz : $\frac{\partial x\ln(x)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial y}{\partial x}$. Comme le champ est défini sur un domaine sans trou, on en déduit qu'il s'agit d'un champ de gradient. Plus précisément, $\vec{\varphi} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ avec $f(x,y) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + y^2/2 + cste.$

Exercice 2 (6 pts)

Soit f le champ scalaire défini en coordonnées polaires par

$$\forall r > 0, \forall\theta \in \mathbf{R},\quad f(r,\theta) = \sin(r-\theta).$$

1. Déterminer les équations polaires des lignes de niveau de f.

   La fonction f est à valeurs dans $[-1,1]$. Soit $c \in [-1,1]$. Alors $f(r,\theta) = c$ ssi $\sin(r-\theta) = c$ ssi $r-\theta = \arcsin(c)$ ssi $r = \theta + \lambda$. On reconnaît l'équation d'une spirale et plus précisément d'une spirale d'Archimède.

2. Calculer le gradient de f défini en polaire par

$$\vec{\mathrm{grad}}(f)(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta.$$

   On trouve $\vec{\mathrm{grad}}(f)(r,\theta) = (\cos(r-\theta), -\frac{1}{r}\cos(r-\theta))$.

3. Déterminer les lignes de champ de $\vec{\mathrm{grad}}(f)$.

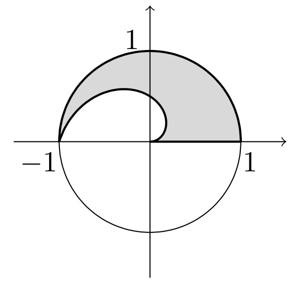
   En polaire, on écrit $r'(-\frac{1}{r}\cos(r-\theta)) - r\theta'\cos(r-\theta) = 0$. Donc $-\frac{r'}{r^2} = \theta'$ et en intégrant : $\frac{1}{r} = \theta+\beta$ ou encore $r = \frac{1}{\theta+\beta}$. Il s'agit encore d'une spirale mais pas d'Archimède.

4. Représenter sur une même figure les lignes de niveau de f et les lignes de champ de $\vec{\mathrm{grad}}(f)$.

Exercice 3 (5 pts)

On considère la portion de disque ci-contre délimitée par un cercle, un segment et la spirale paramétrée par

$$\gamma(t) = \left(\tfrac{1}{\pi}t\cos(t), \tfrac{1}{\pi}t\sin(t)\right), \quad t \in [0, \pi].$$



Calculer son aire de deux façons :

- en utilisant une paramétrisation de son bord,
- à l'aide d'une intégrale double en coordonnées polaires.

On donne les résultats suivants :

$$\int_0^\pi t\cos(t)\sin(t)dt = -\frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^\pi t^2\cos^2(t)dt = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^\pi t^2\sin^2(t)dt = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

Le bord $\mathcal{C}$ est constitué (dans le sens trigonométrique) d'un demi-cercle paramétré par $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$, d'une portion de spirale paramétrée par γ (dans l'autre sens) et du segment paramétré par $\gamma_3(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$. L'aire de la portion est donnée par

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} xdy &= \int_0^\pi \cos(t)\cos(t)dt + \int_\pi^0 \tfrac{1}{\pi}t\cos(t)\tfrac{1}{\pi}(\sin(t) + t\cos(t))dt + \int_0^1 t \times 0dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + 0 \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi paramétrer le domaine D en coordonnées polaires par $D = \{(r, \theta) \mid \theta \in [0, \pi],\ \frac{\theta}{\pi} \leqslant r \leqslant 1\}$. Son aire est alors donnée par

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1dxdy = \int_0^\pi \int_{\frac{\theta}{\pi}}^1 rdrd\theta = \int_0^\pi \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\theta^2}{2\pi^2}\right)d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 4 (4 pts)

On considère l'écoulement d'un fluide dans une canalisation circulaire. Elle est représentée par le cylindre d'axe $0z$ et de rayon 2. En tenant compte des frottements visqueux le long des parois, la vitesse du fluide est représentée par le champ de vecteurs :

$$\vec{v}(x, y, z) = \left(0, 0, 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

1. Représenter l'allure du champ $\vec{v}$ sur une section verticale du cylindre.

   Le champ $\vec{v}$ est vertical. Il est nul sur le cylindre et de norme maximale sur l'axe Oz.

2. Le champ $\vec{v}$ est-il à flux conservatif ?

   Comme $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, le champ est à flux conservatif.

   Le débit de l'écoulement est le flux de $\vec{v}$ à travers une section transverse de la canalisation, c'est-à-dire un disque horizontal. Comme l'écoulement est normal à ces sections, le débit est donné par $d = \iint_{D_h} \|\vec{v}(x, y, h)\| dxdy$, où D_h désigne le disque situé à la hauteur h.

3. Calculer cette intégrale.

   Comme le flux est conservatif, le résultat ne dépendra pas de h et on peut prendre $h = 0$. Il s'agit de calculer $d = \iint_{D_h} (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$. Passons en coordonnées polaires :

$$d = \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (2 - r) r d\theta dr = 2\pi \int_{0}^{2} (2r - r^2) dr = \frac{8\pi}{3}.$$