GM2-Miq2-Pl2, Mathématiques *avril 2016*

Contrôle 1

Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (8 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = x - e^{-y}$. Toutes les figures seront représentées sur un même graphe dont la qualité sera fortement prise en compte.

1. Déterminer et représenter les lignes de niveau de f.
2. Calculer le gradient de f.
   On note dans la suite $\vec{\varphi} = \overrightarrow{grad}(f)$.
3. Représenter l'allure de $\vec{\varphi}$.
4. Déterminer et représenter les lignes de champ de $\vec{\varphi}$.
5. Calculer les trajectoires de $\vec{\varphi}$.
6. Montrer que le laplacien de f est en tout point strictement négatif. Quelle propriété du graphe de f cela traduit-il ?

Exercice 2 (4 pts)

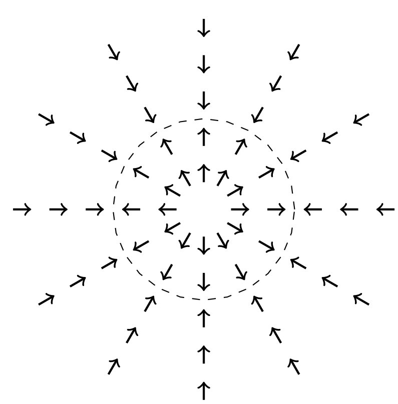
On considère le champ de vecteur défini dans la base des coordonnées polaire par $\vec{\psi}(r,\theta) = (\sin(\theta), 1)$.

1. Représenter l'allure du champ $\vec{\psi}$.
2. Déterminer ses lignes de champ et justifier qu'il s'agit de courbes fermées.
3. En déduire, avec un argument de circulation le long d'un chemin, que $\vec{\psi}$ n'est pas un champ de gradient.
4. Le champ $\vec{\psi}$ est-il à flux conservatif ?

Exercice 3 (3 pts)

On considère une certaine fonction g définie et continue sur $\mathbf{R}^2$. On a représenté ci-contre son gradient (il n'est pas défini au centre ni sur le cercle en pointillé).

Représenter l'allure du graphe de la fonction g et proposer une expression analytique possible de g.



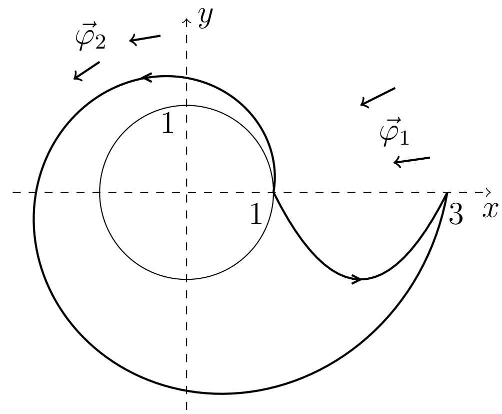
Exercice 4 : voyage spatial (6 pts)

On souhaite envoyer une fusée dans l'espace. On considère deux trajectoires possibles aboutissant au même point. Elles sont représentées par les deux chemins ci-contre.

Le premier est la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$ et le second est la spirale logarithmique paramétrée par

$$\gamma_2(\theta) = \left(e^{\lambda\theta}\cos(\theta), e^{\lambda\theta}\sin(\theta)\right), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

avec $\lambda = \frac{\ln(3)}{2\pi}$.



On souhaite étudier l'action de plusieurs forces sur ces déplacements. On considère les champs

$$\vec{\varphi}_1(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\right), \qquad \vec{\varphi}_2(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Le premier champ, $-\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$ en polaire, pourrait être le champ de gravité terrestre et le second $\frac{1}{r}\vec{u}_\theta$ (qui a été étudié en TD) pourrait décrire la force d'entraînement liée à la rotation de la Terre.

1. Calculer les circulations de ces deux champs le long des deux chemins. Lorsque cela est possible, on pourra utiliser le potentiel associé à chaque champ.
2. Commenter les résultats obtenus. Sont-ils cohérents avec les allures des champs et des chemins ?
3. On souhaite aussi décrire l'action des forces de frottements. En supposant que les deux déplacements se font à vitesse constante, la force de frottement est une force qui s'oppose au mouvement et dont la norme est donnée par une fonction $f(x,y)$ (qui décroît avec l'altitude).

   Donner, sous forme intégrale, la circulation de cette force le long des deux chemins. Que peut-on en dire ?