

CONTRÔLE 1

*Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 : Champ de vecteurs (7 points)

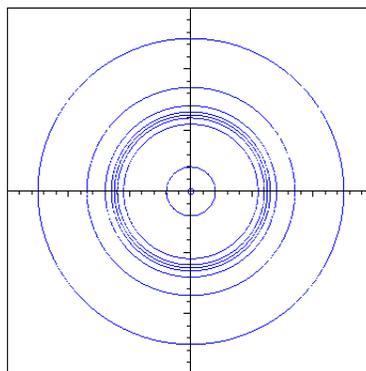
Soit $\vec{\varphi}$ le champ de vecteurs défini dans les repères $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associés aux coordonnées polaires par

$$\forall r > 0, \forall \theta \in [0, 2\pi[, \quad \vec{\varphi}(r, \theta) = (\sin(\theta), -\cos(\theta)) = \sin(\theta)\vec{u}_r - \cos(\theta)\vec{u}_\theta.$$

1. Représenter l'allure graphique du champ $\vec{\varphi}$.
2. Montrer que les lignes de champ de $\vec{\varphi}$ sont les courbes définies par les équations $r = \lambda|\cos(\theta)|$, avec $\lambda \in \mathbf{R}_+$.
3. En revenant aux coordonnées cartésiennes, reconnaître ces courbes et les représenter.

Exercice 2 : Lignes de niveau (7 points)

1. Soit f le champ scalaire défini sur \mathbf{R}^2 par $f(x, y) = e^{x^2+y}$.
 - (a) Déterminer les lignes de niveau de f .
 - (b) Calculer son gradient.
 - (c) Représenter les lignes de niveau et le champ de gradient de f .
2. Les courbes ci-dessous sont des lignes de niveau d'un certain champ scalaire g . Elles correspondent à des paliers réguliers des valeurs de g . Précisons également que le gradient de g est en tout point centrifuge, c'est-à-dire que son opposé est dirigé vers le centre du repère.

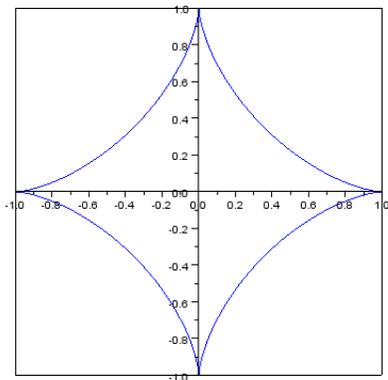


Représenter l'allure du graphe de l'application $(x, y) \rightarrow g(x, y)$.

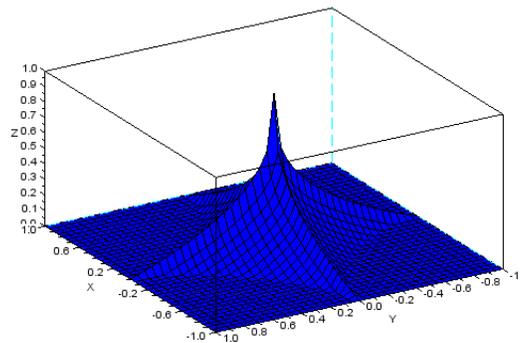
Exercice 3 : Intégrales multiples (6 points)

Notons D le domaine de \mathbf{R}^2 délimité par l'astroïde paramétrée par

$$\gamma(\theta) = (\cos^3(\theta), \sin^3(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$



Astroïde



Graphe de f

Quelques formules utiles :

$$\cos^2(x) \sin^4(x) = \frac{1}{32}(-\cos(2x) - 2\cos(4x) + \cos(6x) + 2), \quad \cos^2(x) \sin^2(x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)).$$

1. Calculer l'aire de D .
2. On considère la fonction définie sur D par $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2/3 + y^2/3}$. À l'aide du changement de variable $(r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos^3(\theta), r \sin^3(\theta))$, déterminer la valeur moyenne de f sur D .