Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 : Champ de vecteurs (7 points)

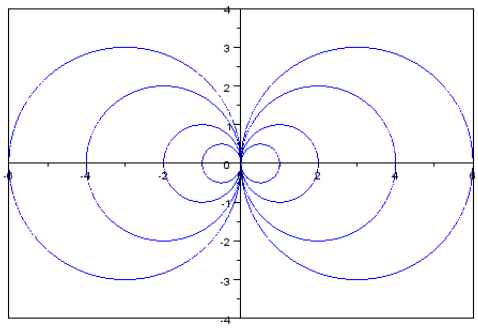
Soit $\vec{\varphi}$ le champ de vecteurs défini dans les repères $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associés aux coordonnées polaires par

$$\forall r > 0, \forall \theta \in [0, 2\pi[, \qquad \vec{\varphi}(r,\theta) = (\sin(\theta), -\cos(\theta)) = \sin(\theta)\vec{u}_r - \cos(\theta)\vec{u}_\theta.$$

1. Représenter l'allure graphique du champ $\vec{\varphi}$.

   Remarquons que les vecteurs du champ sont tous de norme 1 et ne dépendent pas de r. Ils sont verticaux sur les axes, orientés vers le haut sur l'axe Oy et vers le bas sur l'axe Ox. Comme on est en polaire, le champ n'est pas défini en l'origine.

   On représente ci-dessous les lignes de champs de $\vec{\varphi}$ obtenues à la question 3. Les cercles de droite sont parcourus dans le sens horaire et ceux de gauche dans le sens trigo.



2. Montrer que les lignes de champ de $\vec{\varphi}$ sont les courbes définies par les équations $r = \lambda|\cos(\theta)|$, avec $\lambda \in \mathbf{R}_+$.

   On cherche les courbes $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ telles qu'en tout point le vecteur dérivé $\gamma'(t) = (r'(t), r(t)\theta'(t))$ soit colinéaire au champ $\vec{\varphi}$. Ainsi $(r', r\theta')$ est colinéaire à $(\sin(\theta), -\cos(\theta))$. On obtient

$$-r'\cos(\theta) = r\theta'\sin(\theta) \quad \text{donc} \quad \frac{r'}{r} = -\frac{\theta'\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

   On intègre : $\ln(r) = \ln(|\cos(\theta)|) + c$ où c est une constante. Finalement $r = e^c|\cos(\theta)| = \lambda|\cos(\theta|)$ avec $\lambda > 0$.

3. En revenant aux coordonnées cartésiennes, reconnaître ces courbes et les représenter.

   Remplaçons r et $\cos(\theta)$ par leurs expressions cartésiennes : $\sqrt{x^2+y^2} = \lambda\frac{r|\cos(\theta)|}{r} = \lambda\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Donc $x^2 + y^2 = \lambda|x|$. On reconnaît l'équation d'un cercle : $(x \pm \frac{\lambda}{2})^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$. Selon le signe de x, il s'agit du cercle de centre $\pm\lambda/2$ et de rayon $\lambda/2$.

   Finalement, les lignes de champs sont les cercles centrés sur l'axe des abscisses et passant par l'origine.

Exercice 2 : Lignes de niveau (7 points)

1. Soit f le champ scalaire défini sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y}$.
   (a) Déterminer les lignes de niveau de f.

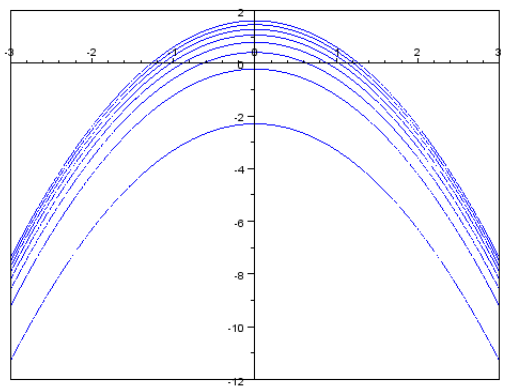
   Soit $c \in \mathbf{R}$. L'équation $f(x,y) = c$ n'a de solution que si $c > 0$. Dans ce cas $f(x,y) = c$ équivaut à $x^2 + y = \ln(c)$. On reconnaît l'équation d'une parabole d'axe Oy dirigée vers le bas.

   (b) Calculer son gradient.

$$\vec{grad}(f) = (2xe^{x^2+y}, e^{x^2+y}).$$

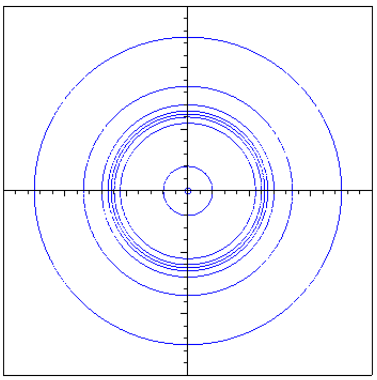
   (c) Représenter les lignes de niveau et le champ de gradient de f.

   Afin de visualiser les pentes de f, on représente ses lignes de niveau pour des valeurs régulières de c.



   Le gradient est en tout point orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point. Il est plutôt dirigé vers le haut de la figure. Sa norme est d'autant plus importante que y et $|x|$ sont grands.

2. Les courbes ci-dessous sont des lignes de niveau d'un certain champ scalaire g. Elles correspondent à des paliers réguliers des valeurs de g. Précisons également que le gradient de g est en tout point centrifuge, c'est-à-dire que son opposé est dirigé vers le centre du repère.



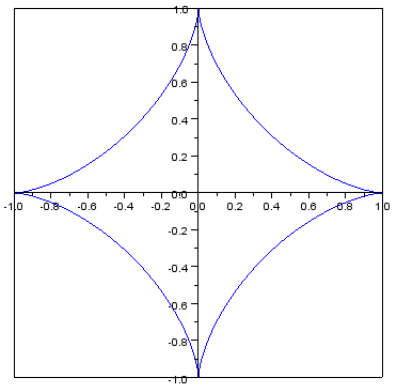
Représenter l'allure du graphe de l'application $(x, y) \to g(x, y)$.

Notons tout d'abord que les lignes de niveau sont des cercles concentriques, ce qui signifie que g est invariant par rotation autour de l'origine. Comme le gradient est centrifuge, la fonction g est croissante lorsqu'on s'éloigne de l'origine. Il faut de plus noter que les lignes de niveau sont rapprochées à une certaine distance de l'origine ; la pente de g est forte dans cette zone. Elle redevient plus faible en dehors de cette zone.

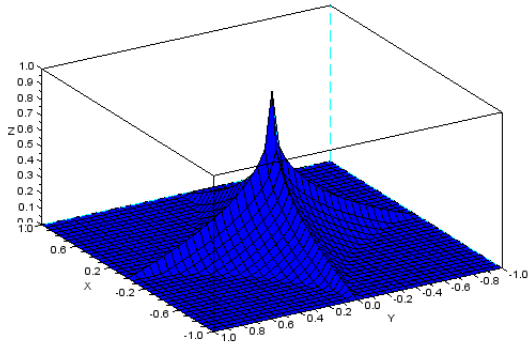
Exercice 3 : Intégrales multiples (6 points)

Notons D le domaine de $\mathbf{R}^2$ délimité par l'astroïde paramétrée par

$$\gamma(\theta) = (\cos^3(\theta), \sin^3(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$



Astroïde



Graphe de f

Quelques formules utiles :

$$\cos^2(x)\sin^4(x) = \frac{1}{32}(-\cos(2x) - 2\cos(4x) + \cos(6x) + 2), \qquad \cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)).$$

1. Calculer l'aire de D.
   Notons A la courbe de l'astroïde. Alors

$$\mathcal{A}(D) = \int_A -y dx = \int_0^{2\pi} -\sin^3(\theta) \times (-3\sin(\theta)\cos^2(\theta)) d\theta$$

$$= [\frac{3}{32}(-\sin(2\theta)/2 - 2\sin(4\theta)/4 + \sin(6\theta)/6 + 2\theta)]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

2. On considère la fonction définie sur D par $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$. À l'aide du changement de variable $(r, \theta) \to (x, y) = (r\cos^3(\theta), r\sin^3(\theta))$, déterminer la valeur moyenne de f sur D.

   On cherche à calculer $\frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$.

   Calculons le jacobien du changement de variable :

$$J = \begin{vmatrix} \cos^3(\theta) & -3r\sin(\theta)\cos^2(\theta) \\ \sin^3(\theta) & 3r\cos(\theta)\sin^2(\theta) \end{vmatrix} = 3r(\cos^4\sin^2 + \cos^2\sin^4) = 3r\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$$

   Le domaine D est obtenu en faisant varier r dans $]0, 1[$ et θ dans $]0, 2\pi[$. Ainsi, on peut écrire la formule de changement de variable :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta)|3r\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)| d\theta dr.$$

On a $f(r,\theta) = 1 - \sqrt{(r\cos^3)^{\frac{2}{3}} + (r\sin^3)^{\frac{2}{3}}} = 1 - \sqrt{r^{\frac{2}{3}}(\cos^2 + \sin^2)} = 1 - r^{1/3}$. Donc

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r - 3r^{4/3}) \cos^2 \sin^2 \, d\theta dr = [3r^2/2 - 9r^{7/3}/7]_0^1 \times [\frac{1}{8}(\theta - \sin(4x)/4)]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{56}.$$

Finalement en divisant par l'aire de D, on obtient que la valeur moyenne de f sur D est $\frac{1}{7}$.