Mathématiques pour l'ingénieur mécanicien

Seconde partie

Jean-Romain Heu

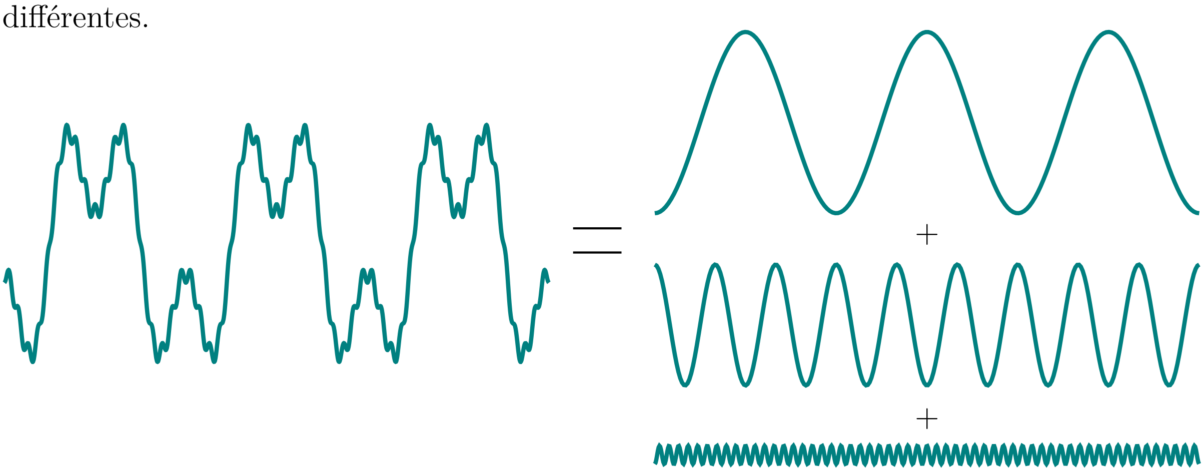
14 avril 2019

Séries de Fourier

La théorie des séries de Fourier a été développée pour la résolution de l'équation de la chaleur. Elle s'est révélée par la suite précieuse pour l'étude des phénomènes périodiques. En mécanique, les séries de Fourier permettent, entre autres, d'analyser les vibrations ou les oscillations d'un système.

1 Introduction

L'objectif des séries de Fourier est de pouvoir décomposer une fonction périodique quelconque en une somme de fonctions sinusoïdales. Par exemple, la fonction périodique ci-dessous peut s'écrire comme une somme de trois sinusoïdes d'amplitudes et fréquences différentes.



Cette démarche est une démarche d'algèbre linéaire : si les fonctions sinusoïdales forment une base de l'espace vectoriel des fonctions périodiques, décomposer une fonction en une somme de sinusoïdes revient à déterminer ses coordonnées dans cette base.

Le bon cadre est plus exactement celui de la géométrie et des espaces de Hilbert. Nos fonctions sinusoïdales forment en fait une base orthonormée (pour un certain produit scalaire et en un sens qu'il faudra préciser) et décomposer une fonction revient alors à la projeter sur les différentes fonctions de la base. Nous précisons cela dans la section suivante.

L'intérêt de la décomposition de Fourier est qu'elle permet de décrire une fonction périodique en terme de fréquences : chaque fonction sinusoïdale de base représente **une** fréquence ; une fonction périodique quelconque peut s'interpréter, via la décomposition de Fourier, comme une combinaison de **plusieurs** fréquences. Beaucoup de systèmes (mécaniques ou électroniques) se comportent différemment selon les fréquences qu'on leur impose ; la décomposition de Fourier est alors nécessaire pour comprendre comment ces systèmes réagissent à chaque composante de la fonction considérée.

2 Définitions

Précisons le cadre de ce qui a été décrit précédemment. Nous commencerons par le cas le plus simple des fonctions 2π-périodiques et nous nous restreindrons aux fonctions continues par morceaux.

Les fonctions sinusoïdales de base de cet espace sont les fonctions de la forme $\sin(nt)$ et $\cos(nt)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$. En version complexe, ce sont les fonctions $e_n : t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

On peut munir l'espace des fonctions complexes 2π-périodique du produit hermitien et de sa norme associée

$$<f|g> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t, \qquad \|f\| = \sqrt{< f|f >} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(t)\|^2\mathrm{d}t}.$$

Il est possible de montrer que la famille infinie des fonctions e_n forme une base orthonormée de notre espace de fonctions 2π-périodiques [1]. Cela signifie que toute fonction f de notre espace peut se décomposer comme une combinaison linéaire infinie des fonctions e_n et cette décomposition s'obtient en projetant f sur chaque élément de la base :

$$f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} <f|e_n> e_n.$$

Cette écriture est la décomposition de Fourier de la fonction f. Concrètement, on obtient les définitions suivantes.

Définition

Soit f une fonction 2π-périodique. On appelle **coefficients de Fourier complexes** de f les nombres définis pour $n \in \mathbf{Z}$ par

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t.$$

On appelle **décomposition de Fourier** de f l'écriture

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int}.$$

Remarques

- ★ Nous préciserons dans la dernière section le domaine de validité de cette dernière égalité.
- ★ D'après ce qui a été dit, la décomposition de Fourier d'une fonction est unique et tout se comporte linéairement. Par exemple, pour deux fonctions f et g, et $\lambda \in \mathbf{C}$, on a pour tout n, $c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g)$.
- ★ Le coefficient c_0 représente la **valeur moyenne** de f. Il représente dans la décomposition la partie constante de la fonction.
- ★ Les bornes des intégrales importent peu tant que la longueur de l'intervalle vaut 2π.

1. Il s'agit plus précisément d'une base de Hilbert, cela fonctionne comme une base classique mais en s'autorisant les combinaisons linéaires infinies. Et les fonctions continues par morceaux ne suffisent pas, il faut en toute rigueur considérer l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable.

Autres définitions

Tout ce que nous avons dit se généralise sans difficulté au cas général des fonctions T-périodiques. Il suffit d'adapter la période de nos fonctions e_n ainsi que notre produit hermitien.

Définition

Soit f une fonction T-périodique continue par morceaux. Ses coefficients de Fourier complexes ainsi que sa décomposition de Fourier sont définis par

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nt}\mathrm{d}t, \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t}.$$

On peut également décomposer les fonctions en série de Fourier sous forme réelle avec les fonctions cos et sin. Il faut légèrement adapter notre produit scalaire.

Définition

Soit f une fonction T-périodique à valeurs réelles. Les **coefficients de Fourier réels** de f sont les nombres définis pour $n \in \mathbf{N}^*$ par

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t.$$

La décomposition de Fourier de f s'écrit alors

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\tfrac{2\pi}{T}t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(n\tfrac{2\pi}{T}t).$$

Remarques

★ La fonction f est paire ssi $\forall n \geq 1,\ b_n = 0$; elle est impaire ssi $\forall n \geq 0,\ a_n = 0$.

★ Il est possible de regrouper des cosinus et sinus de même fréquence sous la forme $a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x+\theta)$ avec $r = |a - \mathrm{i}b| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta = \arg(a - ib)$. Cela permet d'écrire notre série de Fourier sous une autre forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_n\cos(n\tfrac{2\pi}{T}t + \theta_n).$$

★ Les formules d'Euler permettent de passer simplement de l'écriture complexe à l'écriture réelle et réciproquement : $a_0 = c_0$ et pour tout entier $n \geq 1$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n &=& c_n + c_{-n} \\ b_n &=& \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} c_n &=& \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) \\ c_{-n} &=& \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n) \end{array}\right.$$

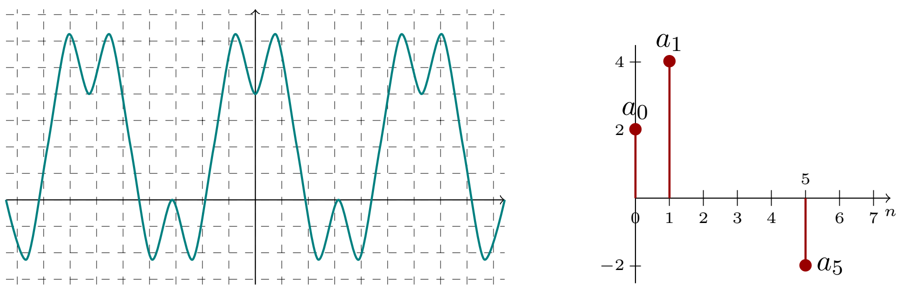
3 Spectre discret

La décomposition en série de Fourier est une décomposition en fréquences. Elle est ainsi adaptée aux phénomènes ondulatoires et plus particulièrement à l'étude du son : filtrage de fréquences, suppression du bruit, fonctionnement des fréquences radio.

D'après tout ce qui précède, la donnée d'une fonction f périodique est équivalente à la donnée de ses coefficients de Fourier. On appelle **spectre** d'une fonction f la suite de ses coefficients de Fourier et on le représente à l'aide d'un (ou des) graphe en bâtons.

Le coefficient c_0 représente la partie constante de f ; les coefficients c_1 et c_{-1} représente la **fréquence fondamentale** de f ; toutes les autres fréquences composant f sont des multiples de celle-ci et sont appelés **harmoniques** de f.

Les **basses fréquences** de f correspondent aux coefficients d'indices n petits et les **hautes fréquences** correspondent aux coefficients d'indice élevé, les termes « petits » et « élevés » étant bien sûr relatifs au phénomène étudié.

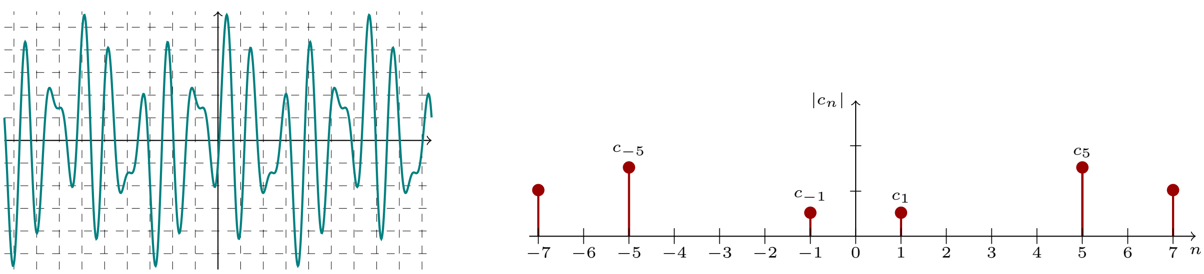


La fonction $f(t) = 2 + 4\cos(t) - 2\cos(5t)$ et le spectre de ses coefficients a_n.

Le spectre de cette fonction pourrait s'analyser ainsi : f est de moyenne 2 et est composée d'une basse fréquence forte et d'une haute fréquence d'amplitude plus faible.

Ces deux représentations de f sont équivalente, la première est une représentation dans le domaine temporel, la seconde dans le domaine fréquentiel. Pour stocker numériquement cette fonction, il est plus simple de stocker ses trois coefficients de Fourier que toutes ses valeurs au cours du temps.

Regardons un second exemple. En complexe, il est souvent d'usage de représenter le spectre en module. Cela suffit pour décrire la répartition des différentes fréquences d'un signal mais l'information est incomplète pour recomposer parfaitement ce signal à partir du spectre.



La fonction $g(t) = \cos(t) + 3\sin(5t) - 2\cos(7t)$ et le spectre de ses coefficients a_n.

On constate que g est composée d'une basse fréquence faible et de deux hautes fréquences d'amplitudes élevées par rapport à la fréquence fondamentale.

4 Convergence de la série de Fourier

Nous avons affirmé en début de chapitre que toute fonction périodique continue par morceaux est égale à sa série de Fourier. Précisons dans cette section la validité de cela.

4.1 Point de vue géométrique

Du point de vue géométrique, nous avons construit nos séries de Fourier comme des décompositions dans une base orthonormée infinie.

Notons S_f la série de Fourier associée à une fonction f : $S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t}$. La théorie des espaces de Hilbert permet bien d'affirmer que $f = S_f$. Mais cette égalité, dans ce contexte, signifie que pour la norme associée à notre produit hermitien, $\|f - S_f\| = 0$. Autrement dit, $\frac{1}{T}\int_0^T (f - S_f)^2 = 0$.

Concrètement, cela implique que pour presque tout t, $f(t) = S_f(t)$: notre fonction est égale presque partout à sa série de Fourier. Mais il est possible que pour certaines valeurs de t, cette égalité ne soit pas satisfaite.

Avant de préciser cela, énonçons une propriété qui est une conséquence directe des espaces de Hilbert et une généralisation du théorème de Pythagore :

Théorème : égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2.$$

En réel : $\|f\|^2 = \frac{2}{T}\int_0^T f^2 = 2a_0^2 + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$.

4.2 Point de vue analytique

Du point de vue de l'analyse, une série de Fourier est une série de fonctions. On aimerait être sûr que cette série est convergente et qu'elle converge bien vers la fonction f considérée [2]. La convergence simple de la série de Fourier est donnée par le théorème suivant.

Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux. Soit S_f sa série de Fourier.
Alors pour tout t dans $\mathbf{R}$, la série $S_f(t)$ converge vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$.
En particulier, si f est continue en t, $S_f(t)$ converge bien vers $f(t)$.

Là où la fonction n'est pas continue, on observe le **phénomène de Gibbs** : l'approximation numérique de f par sa série de Fourier est faussée au niveau des points de discontinuité de f.

2. En complexes nos sommes sont indexées par $\mathbf{Z}$. Dans le cadre des séries de Fourier, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ converge si les sommes partielles $\sum_{n=-N}^{N} u_n$ convergent lorsque N tend vers $+\infty$.

4.3 Vitesse de convergence de la série

En pratique, nous ne pouvons pas calculer de sommes infinies, nous n'avons accès qu'aux sommes partielles et devons nous contenter d'approximations. Nous aimerions donc préciser la vitesse de convergence de nos séries.

Tout repose essentiellement sur les coefficients de Fourier. Nous savons déjà que la série de Fourier est convergente, cela implique que les coefficients convergent vers 0.

On peut préciser plus de propriétés asymptotiques des coefficients en fonction des propriétés de la fonction étudiée. Elles se résument à ce principe simple :

Plus la fonction f est régulière, plus ses coefficients convergent vite vers 0.

Propriété

Soit f une fonction périodique continue par morceaux. Alors

★ $\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$.

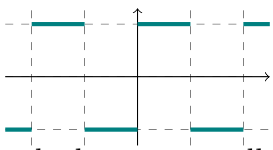
★ Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, alors sa dérivée f' admet une décomposition en série de Fourier et ses coefficients sont donnés par

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$

★ Si f est de classe C^k et C^{k+1} par morceaux alors $\quad c_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

Cette dernière propriété signifie que si f est continue, ses coefficients c_n sont négligeables par rapport à $\frac{1}{n}$; ils sont par exemple de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. Si la fonction est de classe C^1, ils seront négligeables par rapport à $\frac{1}{n^2}$, etc. On trouvera des preuves de résultats analogues dans le chapitre suivant.

5 Un exemple



Considérons la **fonction créneau** f de période 2 et définie par $f(t) = 1$ si $0 < t < 1$ et $f(t) = -1$ si $-1 < t < 0$.

Remarquons que f n'a pas été définie en 0 ou 1. D'après notre théorie, ces valeurs ponctuelles n'ont aucune influence sur les calculs que nous allons mener et sont donc sans intérêt. Notons aussi que cette fonction n'est pas continue mais est bien de classe C^1 par morceaux.

★ Calculons les coefficients de Fourier de f. La fonction est clairement de moyenne nulle, donc $c_0 = 0$. Et pour $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{2}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi nt}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi nt}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} -\frac{2\mathrm{i}}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Ces coefficients sont tous imaginaires purs ce qui est normal pour une fonction impaire. La décomposition en série de Fourier de f est ainsi

$$f(t) = \sum_{n \text{ impair}} -\frac{2\mathrm{i}}{n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi t}.$$

★ D'après le théorème de Dirichlet, cette série converge bien vers $f(t)$ en tout point où f est continue. Essayons, par acquis de conscience, de le vérifier. Mais cela n'a rien de facile ! On constate déjà que la série ne converge pas absolument (car $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{|n|}$ est divergente). Et l'étude de la convergence de la série pour une valeur de t quelconque est réellement difficile.

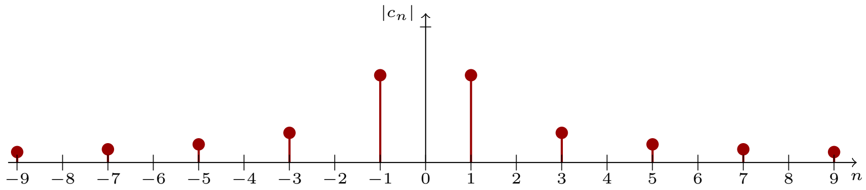
Prenons $t = \frac{1}{2}$: la série devient $\sum_{n \text{ impair}} -\frac{2\mathrm{i}}{n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}}$. Or $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}}$ vaut i ou $-$i lorsque n est impair. En regroupant les termes d'indices positifs et négatifs on obtient

$$\sum_{n \text{ impair}} -\frac{2\mathrm{i}}{n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} = \cdots + \frac{2}{5\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{5\pi} - \cdots = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ est une série alternée convergente. Son étude permet de montrer qu'elle converge vers $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Ainsi notre série converge bien vers $1 = f(\frac{1}{2})$.

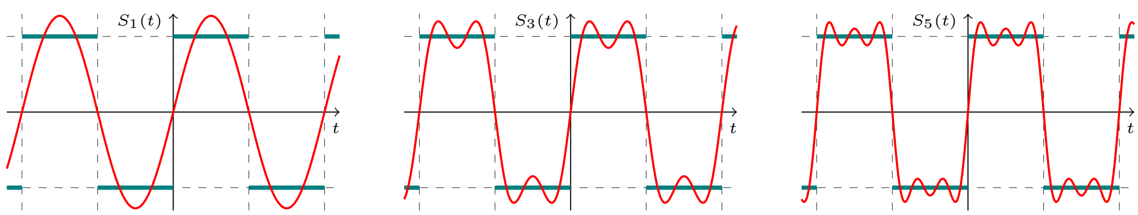
Regardons un point de discontinuité de f. Prenons $t = 0$: la série devient $\sum_{n \text{ impair}} -\frac{2\mathrm{i}}{n\pi}$. On reconnaît la série harmonique qui diverge. Cependant, au sens de Fourier, il faut regarder des sommes partielles de la forme $\displaystyle\sum_{n=-N,\ n \text{ impair}}^{N} -\frac{2\mathrm{i}}{n\pi}$. Les termes négatifs et positifs s'annulent deux à deux et toutes les sommes partielles sont ainsi nulles. Donc au sens de Fourier, cette série converge vers 0. Le théorème de Dirichlet est satisfait : en $t = 0$, la série converge vers la moyenne du saut de continuité $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$.

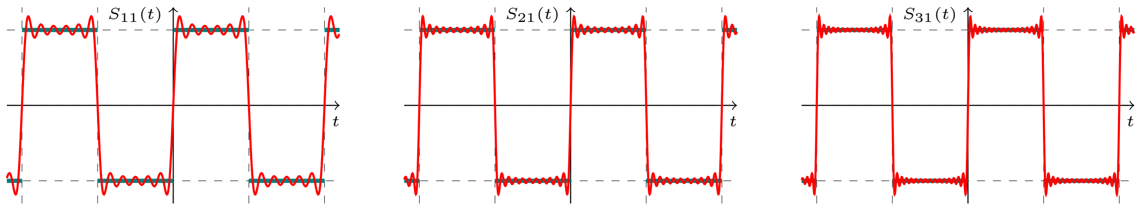
★ Représentons le spectre de f :



Seuls les multiples impairs de la fréquence fondamentale sont présents dans le spectre. La décroissance des coefficients est plutôt lente : les coefficients c_n sont de l'ordre de $\frac{1}{n}$. C'est lié au fait que f n'est même pas continue. Cela nous empêche de donner une interprétation simple du spectre. Il y a certes une basse fréquence forte et bien visible mais les autres fréquences ne sont pas assez faibles pour être négligées. Ce spectre est riche et il faudra beaucoup de termes pour recomposer de manière satisfaisante le signal.

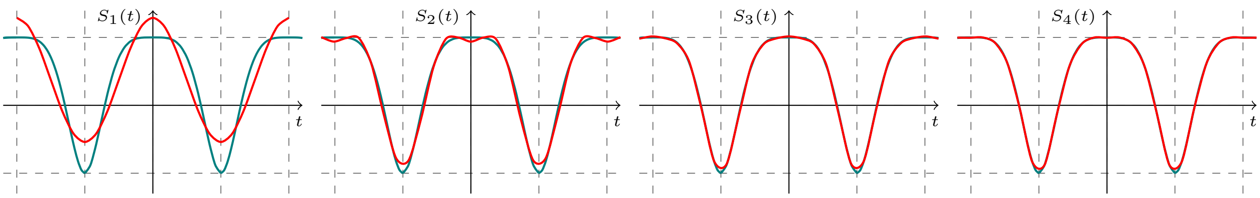
★ Regardons cela plus en détail. Notons $S_N(t)$ la somme partielle $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi t}$.
Par exemple, $S_1(t) = -\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t} + \frac{2\mathrm{i}}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t} = \frac{4}{\pi}\sin(\pi t)$. Représentons les premières sommes partielles et comparons-les à f.





On constate bien que la série converge assez lentement vers f. Même avec une centaine de termes nous n'obtenons pas une approximation satisfaisante de f. Et nous observons le phénomène de Gibbs : au niveau des discontinuités, des pics apparaissent. Si on augmente N ils se concentreront près du point de discontinuité mais leur taille ne se réduira pas.

À titre de comparaison, voici ce qu'on obtient pour une fonction[3] de classe C^2. La convergence est bien plus rapide, les coefficients étant ici de l'ordre de $\frac{1}{n^4}$. L'approximation par la série de Fourier est très satisfaisante avec seulement quatre fréquences ! Notons tout de même que les points où l'approximation est la moins bonne sont ceux où la fonction est la moins régulière, en l'occurrence là où elle n'est pas de classe C^3.



★ Terminons par l'égalité de Parseval : $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$, soit $\displaystyle 1 = \sum_{n\in\mathbf{Z}\text{ impair}} \frac{4}{\pi^2 n^2}$.

On en déduit la somme de la série suivante : $\displaystyle\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$.

À retenir

- ★ Savoir calculer la décomposition de Fourier d'une fonction périodique.
- ★ Savoir interpréter son spectre en termes de répartition des fréquences.
- ★ Savoir étudier la vitesse de convergence d'une série de Fourier et estimer la qualité de l'approximation d'une fonction par les sommes partielles de cette série.
- ★ Comprendre que la décomposition en série de Fourier n'est qu'une décomposition parmi d'autres. Le point de vue géométrique présenté dans ce chapitre s'applique à bien d'autres décompositions.

  Citons par exemple les décompositions en **polynômes orthogonaux** (utilisées notamment dans des problèmes d'optiques), en **fonctions de Bessel** (par exemple pour décrire la vibration d'un tambour), en **ondelettes** (utilisées pour la compression d'images jpeg).

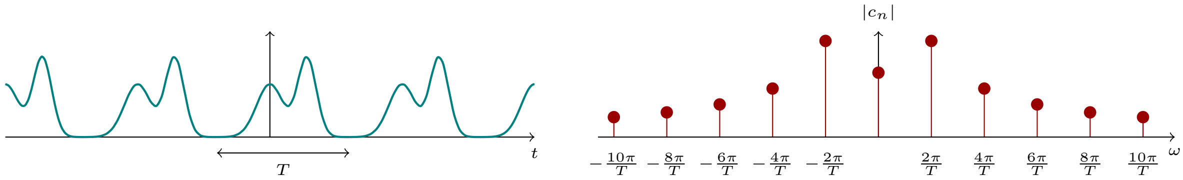
3. Il s'agit de la fonction 2-périodique définie sur $[-1,1]$ par $t \mapsto \cos(\pi t^2)$. Ses coefficients de Fourier ont été déterminée sous forme numérique approchée : $a_0 \approx 0,37$, $a_1 \approx 0,91$, $b_1 = 0$, $a_2 \approx -0,35$, *etc.*

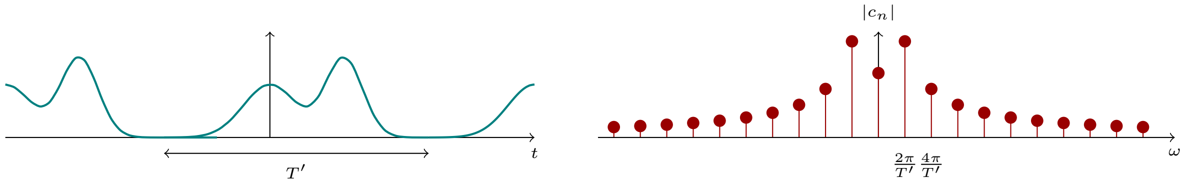
Transformée de Fourier

1 Introduction

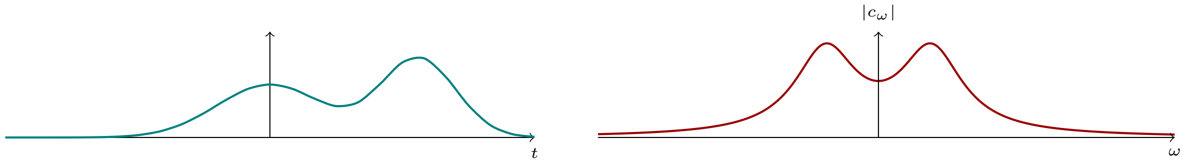
Les séries de Fourier permettent de décomposer une fonction périodique et de décrire l'amplitude des différentes fréquences qui la composent. On peut ainsi représenter une telle fonction par son spectre discret. Peut-on faire une telle analyse fréquentielle pour une fonction qui ne serait pas périodique ?

Regardons des exemples de fonctions de différentes périodes avec leurs spectres, mais représentons les spectres en indiquant en abscisse, non pas les multiples de la fréquence fondamentale mais les fréquences elles-mêmes.





La période de cette seconde fonction est plus grande que celle de la première. Cela se traduit par la présence de fréquences plus basses dans le second spectre que dans le premier et globalement par un spectre plus resserré. Si on considère des fonctions de périodes de plus en plus grandes, on aura des spectres contenant des fréquences de plus en plus proches les unes des autres. À la limite, avec une fonction de période infinie (une fonction non périodique en fait), on aimerait pouvoir définir un spectre contenant toutes les fréquences réelles possibles, c'est-à-dire un **spectre continu**.



Pour définir cet outil, il faut adapter nos définitions de coefficients de Fourier et passer d'un point de vue discret (fréquences dénombrables, séries) à un point de vue continu (continuum de fréquences, intégrales).

Nous donnons ci-dessous le tableau des correspondances entre les deux théories.

	Discret	Continu
Fonction $f(t)$	T-périodique	intégrable sur $\mathbf{R}$
Coefficients de Fourier	$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t}\mathrm{d}t$	$c_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$
Décomposition de Fourier	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t}$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$

2 Décomposition de Fourier

On rappelle qu'une fonction f est intégrable sur $\mathbf{R}$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ converge. Cette hypothèse garantit que les nombres c_ω introduits plus haut soient bien définis. Ils sont plus usuellement notés $c_\omega = \hat{f}(\omega)$.

Définition

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. On appelle **transformée de Fourier** de f l'application

$$\begin{array}{rccl} \hat{f}: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ & \omega & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t. \end{array}$$

Remarques

- ★ Le nombre complexe $\hat{f}(\omega)$ est défini comme le produit scalaire de la fonction f avec la fonction sinusoïdale $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Il permet de mesurer la présence plus ou moins élevée de la fréquence ω dans la fonction f.
- ★ Il existe d'autres définitions analogues, plus adaptées à certaines considérations physique (fréquences/pulsations) ou mathématiques :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\omega t}\mathrm{d}t \qquad \text{ou encore} \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

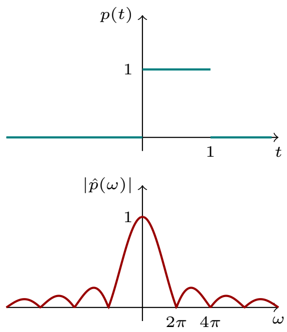
  La théorie présentée ici reste la même avec ces définitions, seules quelques constantes peuvent être modifiées dans les formules.
- ★ L'hypothèse d'intégrabilité n'est pas tout à fait nécessaire, tout d'abord parce que l'intégrabilité au sens de Fourier est un peu plus large que l'intégrabilité classique sur $\mathbf{R}$ mais également car il existe une théorie plus large, la **théorie des distributions**, qui permet de définir une transformée de Fourier pour une classe bien plus grande de fonctions.

Exemple Soit $p = \mathbf{1}_{[0,1]}$ la fonction « porte » définie par $p(t) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $p(t) = 0$ sinon. Sa transformée de Fourier est définie par

$$\hat{p}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - 1}{-\mathrm{i}\omega}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}}{-\mathrm{i}\omega} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}} \operatorname{sinc}(\tfrac{\omega}{2}),$$

où sinc désigne la fonction **sinus cardinal** définie par $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Notre calcul n'est pas valable en $\omega = 0$. On obtient $\hat{p}(0) = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1$.



Ce spectre n'est pas simple à interpréter. Comme pour la fonction créneau, il contient beaucoup de fréquences. Disons simplement que les basses fréquences sont les plus importantes.

La transformée de Fourier d'une fonction décrit sa répartition de toutes les fréquences réelles. Il est alors possible de décomposer cette fonction en une somme intégrale de fonctions sinusoïdales affectées des coefficients donnés par la transformée.

Théorème d'inversion

Soit f une fonction intégrable. Supposons que sa transformée $\hat{f}$ soit également intégrable. Alors on peut recomposer f à partir de sa transformée de Fourier sous la forme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega.$$

Remarques

- ★ Le facteur $\frac{1}{2\pi}$ n'a pas d'interprétation particulière, ce n'est qu'un terme de renormalisation.
- ★ Attention, alors que dans la version discrète, on distinguait facilement la formule des coefficients de Fourier et la série de Fourier, on peut ici confondre la formule des coefficients $\hat{f}(\omega)$ et la recomposition de f sous forme intégrale. Le fait que ces formules soient analogues a du sens et correspond à des propriétés intéressantes de la transformée mais est aussi source de confusion.

Démonstration

Nous ne donnons qu'une esquisse de preuve, valable pour une fonction f de classe C^1, à **support compact** (c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle borné).
L'idée principale de la preuve repose sur ce qui a été dit en introduction : la transformée de Fourier dérive des séries de Fourier après passage du discret au continu.
D'après notre hypothèse, on peut se donner un intervalle I contenant toutes les valeurs non nulles de f. Notons T sa longueur et considérons la fonction T-périodique égale à f sur I.
On écrit sa série de Fourier :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t}, \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_I f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t = \tfrac{1}{T} \hat{f}\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right).$$

Ainsi, $\forall t \in I, \quad f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{2\pi}{T} \displaystyle\sum_{n=-\frac{NT}{2}}^{\frac{NT}{2}} \hat{f}\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t}.$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $\omega \mapsto \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ sur l'intervalle $[-N\pi, N\pi]$. En considérant des intervalles de plus en plus grand afin de faire tendre T vers $+\infty$, on obtient à la limite :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{N \to +\infty} \int_{-N\pi}^{N\pi} \hat{f}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega.$$

Précisons bien que les passages à la limite que nous avons évoqués nécessitent que l'on vérifie certaines hypothèses avant de conclure !
Pour étendre le résultat à toutes les fonctions intégrables, il faut utiliser des résultats de densité des fonctions de classe C^1 à support compact.

Exemple Reprenons notre fonction p. Sa transformée de Fourier n'est pas une fonction intégrable au sens classique mais l'est au sens de Fourier. Nous pouvons écrire la décomposition de Fourier de p :

$$\forall t,\quad p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Inversons les rôles de nos variables : remplaçons t par $-\omega$ et ω par t :

$$\forall \omega,\quad p(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}\mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}t.$$

On reconnaît à droite la définition d'une transformée de Fourier . On en déduit ainsi, sans avoir fait de calcul, que la transformée de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}\mathrm{sinc}(\frac{t}{2})$ est la fonction $\omega \mapsto 2\pi p(-\omega) = 2\pi\mathbf{1}_{[-1,0]}$.

Comme pour les séries de Fourier, la décomposition de Fourier en somme intégrale est unique. C'est ce que précise la proposition suivante.

On peut voir la transformation $f \mapsto \hat{f}$ comme un changement de repère qui permet de passer du point de vue temporel au point de vue fréquentiel. Le théorème d'inversion fournit la transformation inverse, et on a finalement équivalence entre la donnée d'une fonction ou de sa transformée.

Propriété

L'application qui à une fonction intégrable f associe sa transformée $\hat{f}$ est injective : si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

Démonstration

Supposons que f et g sont deux fonctions intégrables qui vérifient $\hat{f} = \hat{g}$. Notons alors $h = f - g$. On peut vérifier que $\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = 0$. Ainsi h est une fonction intégrable dont la transformée de Fourier est aussi intégrable. D'après le théorème d'inversion, pour tout t, $h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = 0$. Donc $h = 0$ et finalement $f = g$.

3 Propriétés générales

Nous supposerons dans la suite que toutes les fonctions considérées admettent une transformée de Fourier.

Propriété

- ★ **Linéarité :** $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda\hat{f} + \mu\hat{g}$.
- ★ Si f est une fonction réelle paire, alors $\hat{f}$ l'est aussi.
- ★ Si f est une fonction réelle impaire, alors $\hat{f}$ est imaginaire pure impaire.

Propriété : lemme de Riemann-Lebesgue

De même que la suite des coefficients de Fourier c_n tend vers 0, si f est une fonction intégrable, alors $\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

Et comme pour les coefficients de Fourier, plus la fonction est régulière, plus sa transformée converge rapidement vers 0 en l'infini.

Démonstration

Donnons la preuve dans le cas des fonctions de classe C^1 à support compact. On peut en déduire le cas général en utilisant la densité de ces fonctions dans l'ensemble des fonctions intégrables.
Soit f une fonction de classe C^1 nulle en dehors d'un intervalle borné $[a, b]$. Calculons sa transformée à l'aide d'une intégration par partie

$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{-\mathrm{i}\omega} \right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{-\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, $f(a) = f(b) = 0$ et d'autre part, f est continue donc bornée sur $[a, b]$ et l'exponentielle complexe est bornée par 1 en module. En notant M un majorant de $|f|$, on obtient $|\hat{f}(\omega)| \leqslant \int_a^b M \cdot \frac{1}{|\omega|}\mathrm{d}t = \frac{M(b-a)}{|\omega|}$. On en déduit bien que $\hat{f}(\omega)$ converge vers 0 quand ω tend vers $\pm\infty$.

4 Manipulations

Propriété : décalage et déphasage

★ Soient α et β deux nombres réels. Soit g définie par $g(t) = f(t + \alpha)$.
Alors sa transformée est donnée par $\hat{g}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\omega}\hat{f}(\omega)$.

★ Soit h définie par $h(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\beta}f(t)$.
Alors sa transformée est donnée par $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega - \beta)$.

Interprétons : la fonction g est obtenue en décalant le graphe de la fonction f de α vers la gauche. Autrement dit, les graphes de f et g ont exactement la même allure. Il est évident que ces deux fonctions seront composées des mêmes fréquences : en module, leurs transformées de Fourier sont identiques, le terme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\omega}$ est un terme de déphasage qui n'affecte que l'argument de la transformée.

Réciproquement, la fonction h est obtenue en déphasant la fonction f et cela se traduit par un décalage de la transformée de Fourier. Cela est trivial si f est une fonction constante. Dans ce cas, son spectre est réduit à un terme en 0. La multiplication par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}$ le transforme en une fonction sinusoïdale ne contenant qu'une seule fréquence β d'amplitude 1. Son spectre est donc bien décalé de β .

Démonstration

On peut démontrer le premier résultat à l'aide d'un changement de variable dans la définition de $\hat{g}(\omega)$. Il est aussi possible de raisonner à partir du théorème d'inversion. Supposons que le théorème s'applique à la fonction f, alors pour tout t, $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$. Récrivons cette égalité en $t+\alpha$:

$$g(t) = f(t+\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t+\alpha)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\alpha}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Cette dernière intégrale est donc la décomposition de Fourier de la fonction g. Par unicité de cette décomposition, on déduit que les coefficients $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\alpha}\hat{f}(\omega)$ qui la constituent sont les coefficients de g. Ainsi, pour tout ω, $\hat{g}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\alpha}\hat{f}(\omega)$.
Raisonnons de même pour h :

$$h(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\beta}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\beta}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\omega+\beta)}\mathrm{d}\omega.$$

Il s'agit encore d'une décomposition de Fourier, mais avec un décalage des fréquences. Le coefficient $\hat{f}(\omega)$ n'est plus affecté à la fréquence ω mais à la fréquence $\omega+\beta$. Et par un simple changement de variable, on montre que le coefficient $\hat{h}(\omega)$ affecté à la fréquence ω est égal à $\hat{f}(\omega-\beta)$.

Exemple Soit u la **fonction échelon** définie par $u = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ qui vaut 1 sur $\mathbf{R}_+$ et 0 sur $\mathbf{R}_-^*$. On souhaite calculer sa transformée de Fourier. Pourtant cette fonction n'est pas intégrable et sa transformée n'est a priori pas définie. Essayons néanmoins de l'obtenir d'une manière formelle.

Remarquons que pour tout t, $u(t) - u(t-1) = p(t)$ où p est notre fonction porte entre 0 et 1. Alors, si on admet que la transformée de u existe, on aurait par linéarité : $\widehat{u(t)} - \widehat{u(t-1)} = \hat{p}$.

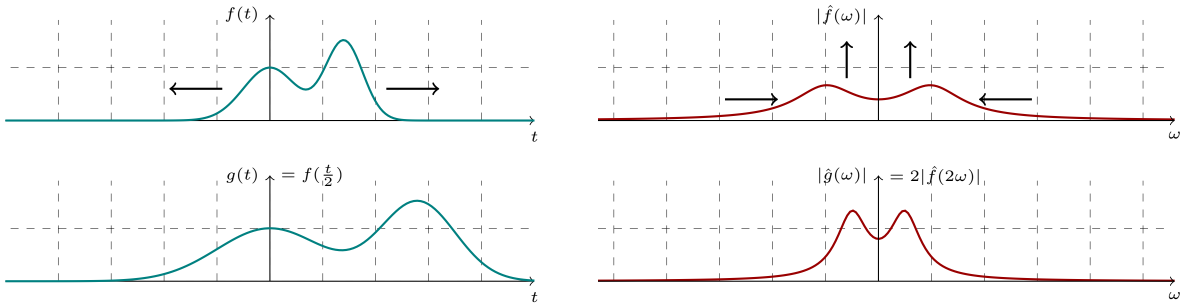
D'après la propriété de décalage, on obtient $\hat{u}(\omega) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\hat{u}(\omega) = \hat{p}(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-1}{-\mathrm{i}\omega}$. On en déduit que $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}$.

Notons que notre raisonnement n'est pas valable en $\omega = 0$. Il y a bien un problème en cette valeur et la transformée de u n'y est pas bien définie.

Propriété : dilatation et contraction

Soit $a \in \mathbf{R}$ et g définie par $g(t) = f(at)$. Alors $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$.

C'est une propriété facile à interpréter : lorsqu'on dilate le graphe de f, on contracte son spectre et on l'amplifie. Réciproquement, lorsqu'on contracte le graphe de f, on dilate son spectre et on l'atténue.



Une conséquence de cela est que si une fonction f a ses valeurs concentrées sur un petit intervalle, son spectre sera lui très étalé. Et réciproquement, si une fonction a un spectre très resserré, cela implique que cette fonction s'étale largement dans le temps.

Ces propriétés sont liées au principe d'incertitude de Heisenberg en physique quantique.

Démonstration

Prenons le cas $a > 0$. Avec le changement de variable $u = at$, on obtient

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{a}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{a} = \tfrac{1}{a}\hat{f}(\tfrac{\omega}{a}).$$

Exemple Calculons la transformée de la fonction sinus cardinal. Nous savons déjà que la transformée de la fonction $f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}\mathrm{sinc}(\frac{t}{2})$ est $\hat{f}(\omega) = 2\pi\mathbf{1}_{[-1,0]}$. Posons $g(t) = f(2t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{sinc}(t)$. D'après la propriété de contraction, $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\hat{f}(\frac{\omega}{2}) = \pi\mathbf{1}_{[-2,0]}$. Enfin, utilisons un déphasage : $\mathrm{sinc}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}g(t)$, donc

$$\widehat{\mathrm{sinc}}(\omega) = \hat{g}(\omega - 1) = \pi\mathbf{1}_{[-1,1]}.$$

Propriété : produit de convolution

On appelle **produit de convolution** de deux fonctions f et g la fonction notée $f * g$, définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\mathrm{d}u.$$

Alors

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \qquad \text{et} \qquad \widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}.$$

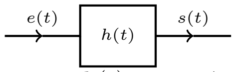
Le produit de convolution est une opération qui apparaît naturellement en traitement du signal ou en traitement de l'image. La transformée de Fourier permet de ramener cette opération un peu compliquée à un simple produit.

Démonstration

Donnons une preuve formelle de la première proposition, basée sur le théorème d'inversion. Notons e_ω la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Un simple calcul permet de montrer que $(f * e_\omega)(t) = e_\omega(t)\hat{f}(\omega)$. Il est également trivial que la convolution est linéaire en chacune des deux fonctions. Décomposons g en une somme intégrale de fonctions e_ω : $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)e_\omega(t)\mathrm{d}\omega$. En supposant que la linéarité s'étend aux sommes intégrales, on obtient

$$(f * g)(t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)(f * e_\omega)(t)\mathrm{d}\omega = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)\hat{f}(\omega)e_\omega(t)\mathrm{d}\omega.$$

On déduit de cette nouvelle décomposition que les coefficients de Fourier de $f * g$ sont bien donnés par $\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$.

Exemple 

En traitement du signal, l'action d'un filtre est souvent représentée par le schéma ci-contre où $e(t)$ désigne le signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie et $h(t)$ caractérise le filtre (on l'appelle **réponse impulsionnelle** du filtre).

Très souvent, la sortie est donnée par $s(t) = (e * h)(t)$. Pour éviter un calcul délicat, on passe à la transformée et on obtient $\hat{s}(\omega) = \hat{e}(\omega)\hat{h}(\omega)$. La transformée $\hat{h}$ est appelée **fonction de transfert** du filtre. La connaissant, il est facile de calculer $\hat{s}$ en fonction de $\hat{e}$ et de décrire l'action du filtre. Pour retrouver la sortie $s(t)$, il faut tout de même utiliser le théorème d'inversion, mais on fait souvent appel à des tables de transformées usuelles.

Par exemple, si $h(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$ et $e(t) = u(t)$, alors $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}$ et $\hat{e}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}$. Donc $\hat{s}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega(1+\mathrm{i}\omega)}$. On décompose cette fraction en éléments simples afin de reconnaître des transformées de Fourier : $\hat{s}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega} = \widehat{(u-h)}(\omega)$. Par unicité de la transformée, on en déduit que $s(t) = u(t) - \mathrm{e}^{-t}u(t)$.

5 Distribution de Dirac

Définition : distribution de Dirac

On appelle **distribution de Dirac en 0** la « fonction » notée δ_0 définie par :

$\forall t \neq 0,\ \delta_0(t) = 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t)\mathrm{d}t = 1.$

On définit de même la distribution de Dirac en $\tau \in \mathbf{R}$ par :

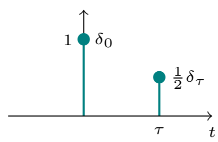
$\forall t \neq \tau,\ \delta_\tau(t) = 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t)\mathrm{d}t = 1.$

Remarques

★ Cette définition est contradictoire, aucune fonction réelle ne peut satisfaire ces deux conditions. Comme son nom l'indique, la distribution de Dirac n'est pas une fonction mais une distribution. Comme nous n'avons pas le cadre adéquat pour proposer une définition rigoureuse, nous nous contenterons de celle-là.

★ La distribution de Dirac permet de modéliser en physique des évènements instantanés (on parle d'**impulsion de Dirac**) .

★ On la représente avec un graphe sous forme d'un bâton.
Cela rappelle nos spectres discrets du chapitre précédent. Les distributions de Dirac permettent justement de lier formellement spectres discrets et continus.



Propriété

★ Au sens des distributions, la fonction échelon est une primitive de la distribution de Dirac : $u' = \delta_0$.

★ La distribution de Dirac en 0 est l'élément neutre du produit de convolution : pour toute fonction intégrable f, $\quad f * \delta_0 = f$.

★ Sa transformée de Fourier est donnée par : $\quad \forall \omega \in \mathbf{R}, \quad \hat{\delta_0}(\omega) = 1$.

Cette dernière propriété semble contredire le lemme de Riemann-Lebesgue mais ce n'est pas le cas puisque δ_0 n'est pas une véritable fonction intégrable.

Notons aussi qu'elle est l'illustration extrême de la propriété de contraction/dilatation : la distribution de Dirac permet de décrire la fonction la plus concentrée qui soit et son spectre est le plus étalé qui soit.

Démonstration

Utilisons notre définition bancale. Tout repose sur le résultat suivant : $\int_a^b f(t)\delta_0(t)\mathrm{d}t$ est égal à $f(0)$ si $0 \in]a,b[$ et à 0 sinon. En effet la distribution de Dirac est nulle en dehors de 0, donc cette intégrale vaut formellement $\int_0^0 f(t)\delta_0(t)\mathrm{d}t$ si 0 est dans l'intervalle. Et sur l'intervalle $[0,0]$, la fonction f est constante égale à $f(0)$. Ainsi $\int_a^b f(t)\delta_0(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_0^0 \delta_0(t)\mathrm{d}t = f(0)\cdot 1$.

Une primitive de δ_0 est donnée par $\int_{-\infty}^t \delta_0(x)\mathrm{d}x$. D'après ce qui précède, cette intégrale vaut 1 lorsque $x > 0$ et 0 lorsque $x < 0$. Il s'agit bien de la fonction échelon.
De même, $(f * \delta_0)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\delta_0(u)\mathrm{d}u = f(t-0) = f(t)$.
Enfin, $\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0} = 1$.

6 Transformée et équations différentielles

Propriété : dérivation et intégration

Soit f une fonction intégrable de classe C^1 de limite nulle en l'infini et telle que f' soit également intégrable.
Alors la transformée de f' est donnée par $\widehat{f'}(\omega) = \mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega)$.

Supposons maintenant que l'application $t \mapsto tf(t)$ est intégrable.
Alors $\hat{f}$ est dérivable et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f} = (\widehat{-\mathrm{i}tf(t)})$.

La première propriété rend la transformation de Fourier particulièrement intéressante pour traiter des problèmes d'équations différentielles. Elle transforme en effet des dérivation en de simples multiplications par t.

Démonstration

Le premier résultat se démontre à l'aide d'une intégration par partie :

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \left[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}\omega f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = 0 + \mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega),$$

en utilisant $f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \to 0$ en $\pm\infty$ d'après l'hypothèse et le fait que l'exponentielle est bornée.
De même, en s'autorisant une telle dérivation, on obtient

$$(\hat{f})'(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}tf(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

On reconnaît bien la transformée de la fonction $t \mapsto -\mathrm{i}tf(t)$.

Exemple On considère l'oscillateur harmonique en régime forcé. Il est modélisé par l'équation différentielle

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t),$$

où ω_0 est la fréquence propre du système et f représente l'excitation du système. On souhaite décrire la réponse du système en fonction des caractéristiques de f.

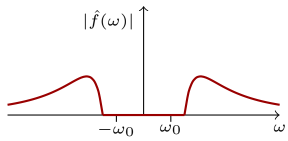
La solution générale de l'équation homogène $y'' + \omega_0^2 y = 0$ est $y_h(t) = \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$. Il reste à trouver une solution particulière. Supposons qu'il en existe une admettant une décomposition de Fourier.

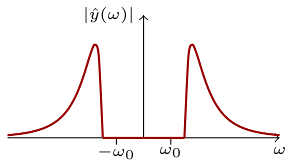
Pour la déterminer, passons à la transformée de Fourier dans l'équation. Par linéarité, $\widehat{y''} + \omega_0^2 \hat{y} = \hat{f}$. En utilisant deux fois la propriété de dérivation, $\widehat{y''}(\omega) = \mathrm{i}\omega\widehat{y'}(\omega) = -\omega^2 \hat{y}(\omega)$.

Ainsi on obtient $-\omega^2\hat{y}(\omega) + \omega_0^2\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)$. Il n'y a plus de dérivées ! Et on déduit l'expression de la transformée de y en fonction de celle de f :

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Pour résoudre l'équation, il faut revenir à $y(t)$ à l'aide d'une transformation inverse. Mais avant de le faire, nous pouvons déjà interpréter notre résultat. On remarque déjà qu'il y a un problème pour $\omega = \omega_0$. Si $\hat{f}(\omega_0) \neq 0$, $\hat{y}(\omega_0)$ n'est pas défini (ou est infini). C'est le phénomène de résonance : si l'excitation contient la fréquence propre du système, cette composante va faire rentrer le système en résonance et le faire osciller de plus en plus fortement (avec un terme du type $at\sin(\omega_0 t)$).





Si $f(\omega_0) = 0$, il n'y a plus de problème. On observe alors que les fréquences présentes dans la solution y sont les mêmes que celles de f mais avec une amplitude divisée par $\omega_0^2 - \omega^2$. Lorsque ω est très proche de la fréquence propre ω_0, il s'agit d'une amplification, si elle en est éloignée, il s'agit d'une atténuation. Autrement dit, lorsqu'on excite le système avec f, il amplifie les fréquences de f proches de sa fréquence propre et atténue celles qui en sont éloignées. Il se comporte comme un **filtre passe-bande**.

Terminons la résolution. Remarquons que $\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} = -\frac{1}{2\omega_0}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{\omega+\omega_0}\right)$. Nous avons déjà vu que la fonction $\omega \mapsto \frac{1}{\omega}$ est la transformée de la fonction $\mathrm{i}u(t)$ où u désigne la fonction échelon. Ici, nous reconnaissons des décalages de cette transformée qui correspondent à des déphasages de l'échelon. On peut en déduire que $\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$ est la transformée de la fonction

$$g(t) = -\frac{1}{2\omega_0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{i}u(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{i}u(t)\right) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}u(t).$$

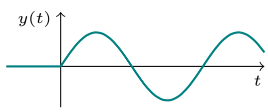
Nous pouvons finalement écrire $\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$. On reconnaît la transformée d'un produit de convolution. Par unicité de la transformée de Fourier, on en déduit que

$$y(t) = (f * g)(t) = \frac{1}{\omega_0}\int_0^{+\infty} \sin(\omega_0 x) f(t-x)\mathrm{d}x.$$

Même si cette expression n'est pas simple, nous avons tout de même réussi à l'obtenir alors que nous ne connaissons pas la fonction f explicitement. Mais à vrai dire, l'expression réellement intéressante est celle de $\hat{y}(\omega)$ que nous avons obtenue plus haut.

Si f est la distribution de Dirac δ_0, on obtient la solution particulière $y_p(t) = (\delta_0 * g)(t) = g(t)$ et la solution générale est de la forme $y(t) = \delta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)u(t)$. Et si on impose les conditions initiales $y(0^-) = y'(0^-) = 0$, on obtient la solution

$$y(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)u(t).$$

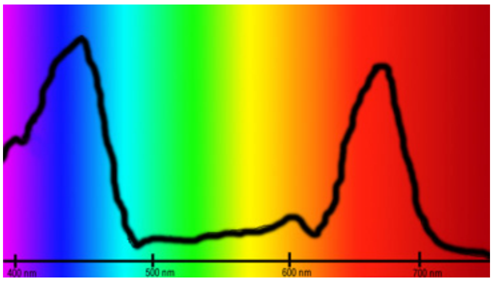


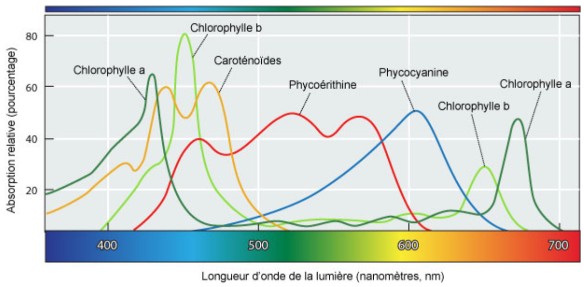
C'est la réponse du système lorsqu'il est initialement au repos et qu'on l'excite avec une simple impulsion instantanée.

7 Spectres

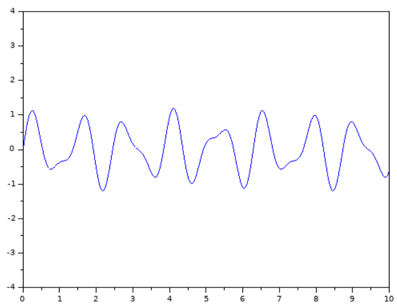
Terminons ce chapitre par deux exemples où le passage au point de vue spectral permet d'obtenir des informations inaccessibles à partir du point de vue temporel.

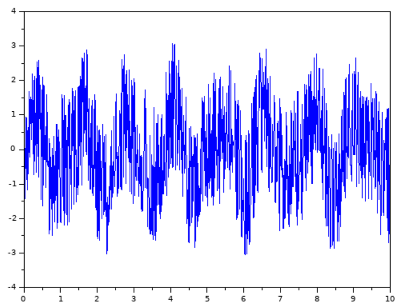
★ La chlorophylle est un pigment qui absorbe une partie de l'énergie lumineuse. Étudier l'onde lumineuse ne donne pas grand chose mais étudier son spectre est instructif. Il permet de comprendre que l'absorption est plus ou moins importante en fonction des différentes fréquences qui composent la lumière et d'expliquer la couleur des végétaux. On donne à gauche le spectre d'absorption de la chlorophylle et à droite des spectres de différents pigments. Attention, ils sont représentés à l'envers, avec en abscisse des longueurs d'onde et non des fréquences.

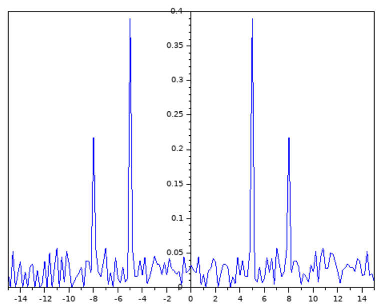




★ Le signal $f(t) = 0,8\sin(5t) + 0,4\sin(8t)$ (représenté à gauche) a été émis. Mais la connexion étant bruitée, c'est le signal g (au milieu) qui a été reçu. Il semble impossible de retrouver le signal d'origine. Afin d'y parvenir, on a calculé le spectre du signal reçu ($|\hat{g}|$ à droite).







Alors que le bruit a une intensité de l'ordre de 2, son spectre est d'intensité faible. On peut ainsi considérer que les fréquences du spectre de faible amplitude proviennent de ce bruit tandis que les pics nettement apparents proviennent du signal f. En supprimant toutes les fréquences faibles, on arrive à reconstituer approximativement le signal émis.

À retenir

- ★ La transformée de Fourier est la version continue des coefficients de Fourier de fonctions périodiques.
- ★ Les spectres continus s'interprètent de manière fréquentielle de la même façon que les spectres discrets.
- ★ Calculer une transformée de Fourier nécessite du calcul intégral, mais on peut souvent l'éviter en utilisant les propriétés de la transformée.
- ★ La transformée de Fourier est un outil intéressant pour traiter certaines équations différentielles.