

Mathématiques architectes-ingénieurs

Jean-Romain Heu

27 mai 2023

Équations différentielles

1 Introduction

La plupart des problèmes physiques se modélisent mathématiquement avec des équations différentielles : le principe fondamental de la dynamique, la mécanique des fluides, etc.

L'exemple qui nous intéressera particulièrement dans ce cours est l'équation des cordes vibrantes. On fait vibrer légèrement une corde fixée aux deux extrémités. L'évolution de la hauteur de la corde en chaque point est donnée par l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

En fonction des conditions au bord, des interactions avec l'extérieur et du degré de précision du modèle, cette équation peut se compliquer et d'autres termes peuvent s'ajouter. Elle permet de modéliser un grand nombre de phénomènes vibratoires.

L'autre problème important que nous traiterons est la conduction thermique qui se résout de façon analogue. L'évolution de la température dans une tige uniforme est donnée par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

La résolution d'une équation différentielle est un problème souvent dur et très souvent impossible. Trouver une primitive d'une fonction est déjà difficile. L'équation $y' = y$ par exemple n'a pas de solution exprimable en fonction des fonctions de base (polynômes, cosinus, sinus). On a ainsi donné un nom, l'exponentielle, à l'unique solution valant 1 en 0. Cependant, même lorsqu'on ne peut pas exprimer les solutions, on peut tout de même décrire les propriétés (variations, limites, etc) des solutions.

2 Rappels sur les équations différentielles

Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation différentielle de la forme

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

où les a_i et b sont des fonctions.

Par exemple $xy^{(3)} + e^{-2x}y'' - 2y' - 6xy = 4 - 2e^{2x}$ est une équation différentielle d'ordre 3. La fonction $y(x) = e^{2x}$ en est une solution. L'équation $yy' + 1 = \ln(y'')$ n'est pas une équation linéaire.

Les équations linéaires jouent un rôle important car ce sont essentiellement les seules pour lesquelles on dispose de méthodes de résolution. Mais même pour celles-là, il n'est

pas toujours possible d'exprimer les solutions à partir des fonctions usuelles. C'est le cas par exemple de l'équation de Bessel citée plus haut.

La résolution des équations linéaires repose sur les deux théorèmes suivants :

Théorème

Soit E_0 une équation différentielle homogène d'ordre n , c'est-à-dire telle que $b(x) = 0$:

$$(E_0) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

Alors sur tout intervalle où a_n ne s'annule pas, l'ensemble des solutions de cette équation est un espace vectoriel de dimension n .

Théorème

Soit E l'équation d'ordre n

$$(E) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Soit E_0 l'équation homogène associée :

$$(E_0) \quad a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0,$$

et soit S_0 l'espace vectoriel de ses solutions (sur un intervalle où a_n ne s'annule pas).

Soit enfin y_p une solution particulière de l'équation E .

Alors l'ensemble des solutions de E est l'ensemble

$$S = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in S_0\}.$$

Autrement dit, pour résoudre une équation linéaire, on commence par chercher toutes les solutions y_0 de l'équation homogène associée, puis on cherche une solution y_p de E et on conclut enfin que les solutions sont les fonctions de la forme $y_p + y_0$.

2.1 Équations d'ordre 1

$$(E) \quad a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Commençons par résoudre l'équation homogène associée :

$$(E_0) \quad a(x)y' + b(x)y = 0.$$

L'ensemble des solutions de E_0 est

$$S_0 = \{\lambda e^{-\int \frac{b}{a}} \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

(La seule difficulté est donc de trouver une primitive $\int \frac{b}{a}$ de la fonction $\frac{b}{a}$.)

Il faut ensuite déterminer une solution particulière de E . Soit on en voit une qui est évidente, soit on peut utiliser la méthode de la variation de la constante. Cette méthode consiste à chercher une solution de la forme de celle que l'on a trouvée dans la première partie et à remplacer la constante λ par une fonction $\lambda(x)$: on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-\int \frac{b}{a}}$. On injecte y_p dans l'équation E . Certains termes doivent nécessairement se simplifier et on aboutit à la condition

$$a(x)\lambda'(x)e^{-\int \frac{b}{a}} = c(x).$$

Donc $\lambda' = \frac{c}{ae^{-\int \frac{b}{a}}}$. Il reste ainsi à trouver une primitive de $\frac{c}{ae^{-\int \frac{b}{a}}}$.

Il reste enfin à conclure : l'ensemble des solutions de E est l'ensemble des solutions de la forme $y_p + y_0$ où y_p est la solution particulière et les y_0 sont les solutions de l'équation homogène.

2.2 Équations d'ordre 2 à coefficients constants

$$E \quad ay'' + by' + cy = f(x)$$

où a, b, c sont des constantes réelles.

Là encore, on commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$E_0 \quad ay'' + by' + cy = 0$$

On associe à cette équation son polynôme caractéristique : $aX^2 + bX + c$.

On détermine les racines r_1 et r_2 de ce polynôme. Alors les solutions de E_0 (c'est un espace vectoriel de dimension 2) sont données par :

Si $r_1 \neq r_2 \in \mathbf{R}$:

$$S_0 = \{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

Si $r_1 = r_2 = r \in \mathbf{R}$:

$$S_0 = \{\lambda e^{rx} + \mu x e^{rx} \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

Si $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$:

$$S_0 = \{e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

Pour chercher une solution particulière, il existe une méthode de la variation de la constante que nous n'étudierons pas ici. Lorsque le second membre $f(x)$ a une forme simple (polynôme, fonction trigonométrique, polynôme \times exponentielle) on cherche une solution particulière de la même forme. En général, on cherche une telle solution avec un polynôme de même degré que f , mais il faut parfois élever ce degré.

Séries numériques, séries de fonctions

Les solutions aux problèmes abordés dans ce cours s'écriront sous forme de séries, c'est-à-dire de sommes infinies.

Les séries numériques mériteraient un cours à part entière mais nous n'aurons que le temps d'en survoler la complexité.

1 Définitions

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle (ou complexe). On appelle série de terme général u_n , notée $\sum_n u_n$ la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n.$$

Si la suite des sommes S_N est convergente, on dit que la série converge. On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite et on l'appelle somme de la série.

Insistons : une série est un objet mathématique faisant appel aux suites et aux limites. Comme pour les suites, la première question qui se pose lorsqu'on étudie une série est : converge-t-elle ?

Si oui, la seconde question est alors : quelle est sa limite ?

Et enfin une question importante pour l'ingénieur derrière son ordinateur : converge-t-elle rapidement ? Combien de termes faut-il sommer pour obtenir une bonne approximation de la somme infinie ?

Il existe des critères pour assurer la convergence ou la divergence d'une série.

Théorème

Soit $(u_n)_n$ une suite. On considère la série $\sum_n u_n$.

- ★ Si u_n ne converge pas vers 0, la série diverge.
- ★ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers l , alors la série converge si $0 \leq l < 1$ et elle diverge si $l > 1$.
- ★ Si $\forall n, 0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_n v_n$ est convergente, alors $\sum_n u_n$ est convergente.

Quelques exemples de référence :

Propriété

- ★ La série $\sum_n x^n$ converge ssi $-1 < x < 1$. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- ★ La série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.
- ★ La série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- ★ De manière générale $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- ★ La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$.
- ★ Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Précisons la vitesse de convergence de certains exemples. Il s'agit de mesurer l'erreur commise en tronquant la série. On appelle cela le reste de la série : $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

Dans le premier exemple, on obtient $R_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1-x}$. Ainsi la convergence de la série vers sa limite $\frac{1}{1-x}$ est en x^N (avec $|x| < 1$). C'est une convergence rapide.

Regardons $\sum_n \frac{1}{n^2}$. Le reste R_N est majoré par $\frac{1}{N-1}$. C'est une convergence assez lente. Pour obtenir une précision de l'ordre de 10^{-2} sur la limite, il faut sommer les 101 premiers termes de la série : $\sum_{n=1}^{101} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \pm 0.01$.

2 Séries de fonctions

Une série de fonction est simplement une fonction définie sous forme d'une série. C'est une application qui à x associe la somme d'une série dépendant de x . Nous avons par exemple vu la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Elle est définie sur $] -1, 1[$ et n'est rien d'autre que la fonction $\frac{1}{1-x}$.

En soi, une série de fonction ne présente pas plus de difficulté que les séries numériques. Mais l'étude des propriétés de ces fonctions est ardue. Nous sommes par exemple habitués à ce qu'une somme de fonctions continues soit encore continue. Cela n'est plus forcément vrai avec les sommes infinies (et cela a des conséquences très concrètes).

Nous ne ferons pas ici la théorie complète des séries de fonctions. Contentons-nous de présenter quelques grandes familles de telles séries.

Définition : série entière

On appelle série entière une fonction de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Définition : série trigonométrique

On appelle série trigonométrique (ou série de Fourier) une fonction de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

Les coefficients b_n sont des nombres réels et on pourrait remplacer le sin par un cos ou une exponentielle complexe.

L'intérêt de telles série est le suivant : sous certaines conditions, n'importe quelle fonction raisonnable peut s'écrire sous forme de telles séries. D'autre part, pour une fonction donnée, l'écriture sous forme de série entière (ou de série de Fourier) est unique : si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a'_n x^n$, alors on peut en déduire $\forall n, a_n = a'_n$.

Ces deux propriétés permettent de parler de décomposition en série entière (ou en série de Fourier). On dispose d'une nouvelle façon de représenter les fonctions qui se trouve être fructueuse dans le cadre de problèmes différentiels.

Comme l'objet de ce cours est justement de résoudre des équations différentielles et que nous comptons le faire à l'aide de séries de fonctions, nous serons bien obligés de considérer les dérivées de ces séries. Cela est plus subtil qu'il n'y paraît. On est tenté de dire que la dérivée d'une somme, qu'elle soit finie ou infinie, est la somme des dérivées. C'est vrai, mais pas toujours ; il y a des hypothèses à vérifier.

Théorème

Dérivabilité d'une série de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ où les u_n sont des fonctions de classe C^1 .

Si pour tout n , il existe un majorant a_n de la fonction $|u'_n|$ sur I tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente, alors f est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Concrètement, dans plusieurs cas de ce cours, nous ne pourrons pas vérifier les hypothèses de ce théorème mais nous l'utiliserons tout de même en espérant que cela est possible.

Exemple : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nx)$. On pose $u_n(x) = \frac{1}{n^3} \cos(nx)$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée $u'_n(x) = -\frac{1}{n^2} \sin(nx)$ est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente. On en déduit que f est dérivable et

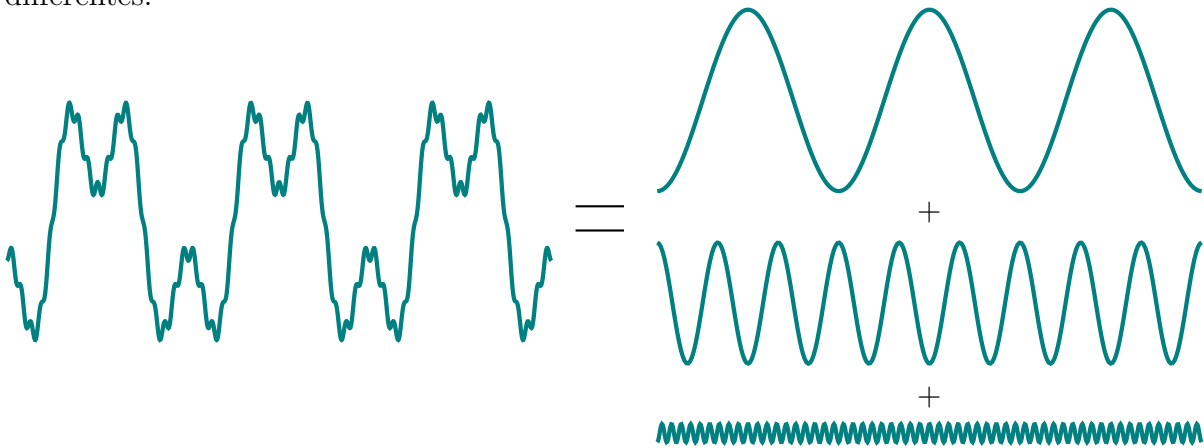
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

Séries de Fourier

La théorie des séries de Fourier a été développée pour la résolution de l'équation de la chaleur. Elle s'est révélée par la suite précieuse pour l'étude des phénomènes périodiques. En mécanique, les séries de Fourier permettent, entre autres, d'analyser les vibrations ou les oscillations d'un système.

1 Introduction

L'objectif des séries de Fourier est de pouvoir décomposer une fonction périodique quelconque en une somme de fonctions sinusoidales. Par exemple, la fonction périodique ci-dessous peut s'écrire comme une somme de trois sinusoides d'amplitudes et fréquences différentes.



Cette démarche est une démarche d'algèbre linéaire : si les fonctions sinusoidales forment une base de l'espace vectoriel des fonctions périodiques, décomposer une fonction en une somme de sinusoides revient à déterminer ses coordonnées dans cette base.

Le bon cadre est plus exactement celui de la géométrie et des espaces de Hilbert. Nos fonctions sinusoidales forment en fait une base orthonormée (pour un certain produit scalaire et en un sens qu'il faudra préciser) et décomposer une fonction revient alors à la projeter sur les différentes fonctions de la base. Nous précisons cela dans la section suivante.

L'intérêt de la décomposition de Fourier est qu'elle permet de décrire une fonction périodique en terme de fréquences : chaque fonction sinusoidale de base représente **une** fréquence ; une fonction périodique quelconque peut s'interpréter, via la décomposition de Fourier, comme une combinaison de **plusieurs** fréquences. Beaucoup de systèmes (mécaniques ou électroniques) se comportent différemment selon les fréquences qu'on leur impose ; la décomposition de Fourier est alors nécessaire pour comprendre comment ces systèmes réagissent à chaque composante de la fonction considérée.

2 Définitions

Précisons le cadre de ce qui a été décrit précédemment. Nous commencerons par le cas le plus simple des fonctions 2π -périodiques et nous nous restreindrons aux fonctions

continues par morceaux.

Les fonctions sinusoïdales de base de cet espace sont les fonctions de la forme $\sin(nt)$ et $\cos(nt)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$. En version complexe, ce sont les fonctions $e_n : t \mapsto e^{int}$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

On peut munir l'espace des fonctions complexes 2π -périodique du produit hermitien et de sa norme associée

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(t)\|^2 dt}.$$

Il est possible de montrer que la famille infinie des fonctions e_n forme une base ortho-normée de notre espace de fonctions 2π -périodiques¹. Cela signifie que toute fonction f de notre espace peut se décomposer comme une combinaison linéaire infinie des fonctions e_n et cette décomposition s'obtient en projetant f sur chaque élément de la base :

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle f|e_n \rangle e_n.$$

Cette écriture est la décomposition de Fourier de la fonction f . Concrètement, on obtient les définitions suivantes.

Définition

Soit f une fonction 2π -périodique. On appelle **coefficients de Fourier complexes** de f les nombres définis pour $n \in \mathbf{Z}$ par

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

On appelle **décomposition de Fourier** de f l'écriture

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.$$

Remarques

- ★ Nous précisons dans la dernière section le domaine de validité de cette dernière égalité.
- ★ D'après ce qui a été dit, la décomposition de Fourier d'une fonction est unique et tout se comporte linéairement. Par exemple, pour deux fonctions f et g , et $\lambda \in \mathbf{C}$, on a pour tout n , $c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g)$.
- ★ Le coefficient c_0 représente la **valeur moyenne** de f . Il représente dans la décomposition la partie constante de la fonction.
- ★ Les bornes des intégrales importent peu tant que la longueur de l'intervalle vaut 2π .

1. Il s'agit plus précisément d'une base de Hilbert, cela fonctionne comme une base classique mais en s'autorisant les combinaisons linéaires infinies. Et les fonctions continues par morceaux ne suffisent pas, il faut en toute rigueur considérer l'espace des fonctions 2π -périodiques de carré intégrable.

Autres définitions

Tout ce que nous avons dit se généralise sans difficulté au cas général des fonctions T -périodiques. Il suffit d'adapter la période de nos fonctions e_n ainsi que notre produit hermitien.

Définition

Soit f une fonction T -périodique continue par morceaux. Ses coefficients de Fourier complexes ainsi que sa décomposition de Fourier sont définis par

$$\forall n \in \mathbf{Z}, c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}.$$

On peut également décomposer les fonctions en série de Fourier sous forme réelle avec les fonctions cos et sin. Il faut légèrement adapter notre produit scalaire.

Définition

Soit f une fonction T -périodique à valeurs réelles. Les **coefficients de Fourier réels** de f sont les nombres définis pour $n \in \mathbf{N}^*$ par

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\frac{2\pi}{T}t) dt.$$

La décomposition de Fourier de f s'écrit alors

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t).$$

Remarques

- ★ La fonction f est paire ssi $\forall n \geq 1, b_n = 0$; elle est impaire ssi $\forall n \geq 0, a_n = 0$.
- ★ Il est possible de regrouper des cosinus et sinus de même fréquence sous la forme $a \cos(x) + b \sin(x) = r \cos(x + \theta)$ avec $r = |a - ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \arg(a - ib)$. Cela permet d'écrire notre série de Fourier sous une autre forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t + \theta_n).$$

- ★ Les formules d'Euler permettent de passer simplement de l'écriture complexe à l'écriture réelle et réciproquement : $a_0 = c_0$ et pour tout entier $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases}$$

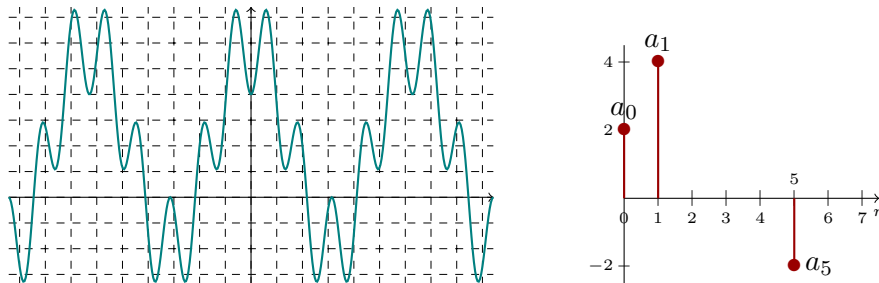
3 Spectre discret

La décomposition en série de Fourier est une décomposition en fréquences. Elle est ainsi adaptée aux phénomènes ondulatoires et plus particulièrement à l'étude du son : filtrage de fréquences, suppression du bruit, fonctionnement des fréquences radio.

D'après tout ce qui précède, la donnée d'une fonction f périodique est équivalente à la donnée de ses coefficients de Fourier. On appelle **spectre** d'une fonction f la suite de ses coefficients de Fourier et on le représente à l'aide d'un (ou des) graphe en bâtons.

Le coefficient c_0 représente la partie constante de f ; les coefficients c_1 et c_{-1} représente la **fréquence fondamentale** de f ; toutes les autres fréquences composant f sont des multiples de celle-ci et sont appelés **harmoniques** de f .

Les **basses fréquences** de f correspondent aux coefficients d'indices n petits et les **hautes fréquences** correspondent aux coefficients d'indice élevé, les termes « petits » et « élevés » étant bien sûr relatifs au phénomène étudié.

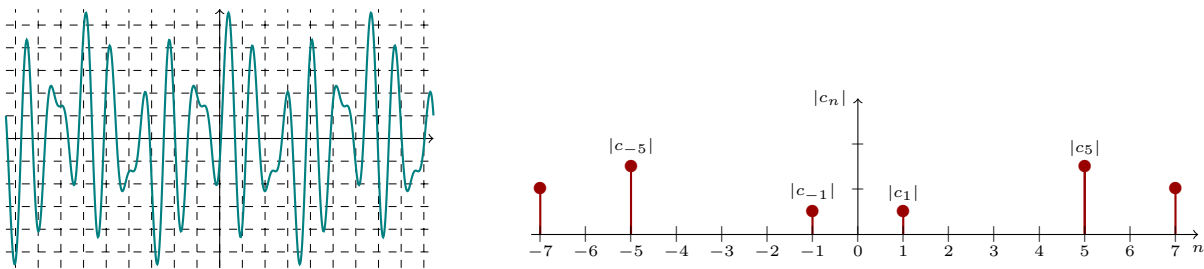


La fonction $f(t) = 2 + 4\cos(t) - 2\cos(5t)$ et le spectre de ses coefficients a_n .

Le spectre de cette fonction pourrait s'analyser ainsi : f est de moyenne 2 et est composée d'une basse fréquence forte et d'une haute fréquence d'amplitude plus faible.

Ces deux représentations de f sont équivalente, la première est une représentation dans le domaine temporel, la seconde dans le domaine fréquentiel. Pour stocker numériquement cette fonction, il est plus simple de stocker ses trois coefficients de Fourier que toutes ses valeurs au cours du temps.

Regardons un second exemple. En complexe, il est souvent d'usage de représenter le spectre en module. Cela suffit pour décrire la répartition des différentes fréquences d'un signal mais l'information est incomplète pour recomposer parfaitement ce signal à partir du spectre.



La fonction $g(t) = \cos(t) + 3\sin(5t) - 2\cos(7t)$ et le spectre de ses coefficients a_n .

On constate que g est composée d'une basse fréquence faible et de deux hautes fréquences d'amplitudes élevées par rapport à la fréquence fondamentale.

4 Convergence de la série de Fourier

Nous avons affirmé en début de chapitre que toute fonction périodique continue par morceaux est égale à sa série de Fourier. Précisons dans cette section la validité de cela.

4.1 Point de vue géométrique

Du point de vue géométrique, nous avons construit nos séries de Fourier comme des décompositions dans une base orthonormée infinie.

Notons S_f la série de Fourier associée à une fonction $f : S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$. La théorie des espaces de Hilbert permet bien d'affirmer que $f = S_f$. Mais cette égalité, dans ce contexte, signifie que pour la norme associée à notre produit hermitien, $\|f - S_f\| = 0$. Autrement dit, $\frac{1}{T} \int_0^T (f - S_f)^2 = 0$.

Concrètement, cela implique que pour presque tout t , $f(t) = S_f(t)$: notre fonction est égale presque partout à sa série de Fourier. Mais il est possible que pour certaines valeurs de t , cette égalité ne soit pas satisfaite.

Avant de préciser cela, énonçons une propriété qui est une conséquence directe des espaces de Hilbert et une généralisation du théorème de Pythagore :

Théorème : égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2.$$

En réel : $\|f\|^2 = \frac{2}{T} \int_0^T f^2 = 2a_0^2 + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$.

4.2 Point de vue analytique

Du point de vue de l'analyse, une série de Fourier est une série de fonctions. On aimerait être sûr que cette série est convergente et qu'elle converge bien vers la fonction f considérée². La convergence simple de la série de Fourier est donnée par le théorème suivant.

Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux. Soit S_f sa série de Fourier.

Alors pour tout t dans \mathbf{R} , la série $S_f(t)$ converge vers $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

En particulier, si f est continue en t , $S_f(t)$ converge bien vers $f(t)$.

Là où la fonction n'est pas continue, on observe le **phénomène de Gibbs** : l'approximation numérique de f par sa série de Fourier est faussée au niveau des points de discontinuité de f .

2. En complexes nos sommes sont indexées par \mathbf{Z} . Dans le cadre des séries de Fourier, on dit que la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n$ converge si les sommes partielles $\sum_{n=-N}^N u_n$ convergent lorsque N tend vers $+\infty$.

4.3 Vitesse de convergence de la série

En pratique, nous ne pouvons pas calculer de sommes infinies, nous n'avons accès qu'aux sommes partielles et devons nous contenter d'approximations. Nous aimerions donc préciser la vitesse de convergence de nos séries.

Tout repose essentiellement sur les coefficients de Fourier. Nous savons déjà que la série de Fourier est convergente, cela implique que les coefficients convergent vers 0.

On peut préciser plus de propriétés asymptotiques des coefficients en fonction des propriétés de la fonction étudiée. Elles se résument à ce principe simple :

Plus la fonction f est régulière, plus ses coefficients convergent vite vers 0.

Propriété

Soit f une fonction périodique continue par morceaux. Alors

- ★ $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$.
- ★ Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, alors sa dérivée f' admet une décomposition en série de Fourier et ses coefficients sont donnés par

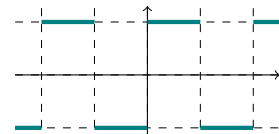
$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f') = inc_n(f).$$

- ★ Si f est de classe C^k et C^{k+1} par morceaux alors $c_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

Cette dernière propriété signifie que si f est continue, ses coefficients c_n sont négligeables par rapport à $\frac{1}{n}$; ils sont par exemple de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. Si la fonction est de classe C^1 , ils seront négligeables par rapport à $\frac{1}{n^2}$, etc. On trouvera des preuves de résultats analogues dans le chapitre suivant.

5 Un exemple

Considérons la **fonction créneau** f de période 2 et définie par $f(t) = 1$ si $0 < t < 1$ et $f(t) = -1$ si $-1 < t < 0$.



Remarquons que f n'a pas été définie en 0 ou 1. D'après

notre théorie, ces valeurs ponctuelles n'ont aucune influence sur les calculs que nous allons mener et sont donc sans intérêt. Notons aussi que cette fonction n'est pas continue mais est bien de classe C^1 par morceaux.

★ Calculons les coefficients de Fourier de f . La fonction est clairement de moyenne nulle, donc $c_0 = 0$. Et pour $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-in\frac{2\pi}{2}t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 -e^{-i\pi nt} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i\pi nt} dt = i \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} -\frac{2i}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Ces coefficients sont tous imaginaires purs ce qui est normal pour une fonction impaire. La décomposition en série de Fourier de f est ainsi

$$f(t) = \sum_{n \text{ impair}} -\frac{2i}{n\pi} e^{in\pi t}.$$

★ D'après le théorème de Dirichlet, cette série converge bien vers $f(t)$ en tout point où f est continue. Essayons, par acquis de conscience, de le vérifier. Mais cela n'a rien de facile! On constate déjà que la série ne converge pas absolument (car $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{|n|}$ est divergente). Et l'étude de la convergence de la série pour une valeur de t quelconque est réellement difficile.

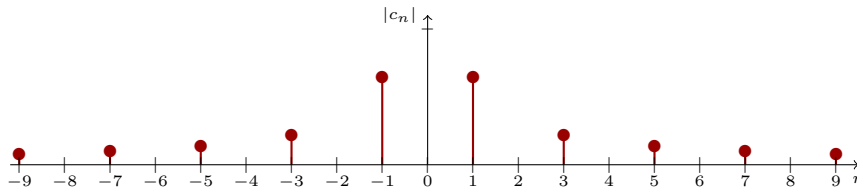
Prenons $t = \frac{1}{2}$: la série devient $\sum_{n \text{ impair}} -\frac{2i}{n\pi} e^{in\frac{\pi}{2}}$. Or $e^{in\frac{\pi}{2}}$ vaut i ou $-i$ lorsque n est impair. En regroupant les termes d'indices positifs et négatifs on obtient

$$\sum_{n \text{ impair}} -\frac{2i}{n\pi} e^{in\frac{\pi}{2}} = \dots + \frac{2}{5\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{5\pi} - \dots = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ est une série alternée convergente. Son étude permet de montrer qu'elle converge vers $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Ainsi notre série converge bien vers $1 = f(\frac{1}{2})$.

Regardons un point de discontinuité de f . Prenons $t = 0$: la série devient $\sum_{n \text{ impair}} -\frac{2i}{n\pi}$. On reconnaît la série harmonique qui diverge. Cependant, au sens de Fourier, il faut regarder des sommes partielles de la forme $\sum_{n=-N, n \text{ impair}}^N -\frac{2i}{n\pi}$. Les termes négatifs et positifs s'annulent deux à deux et toutes les sommes partielles sont ainsi nulles. Donc au sens de Fourier, cette série converge vers 0. Le théorème de Dirichlet est satisfait : en $t = 0$, la série converge vers la moyenne du saut de continuité $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$.

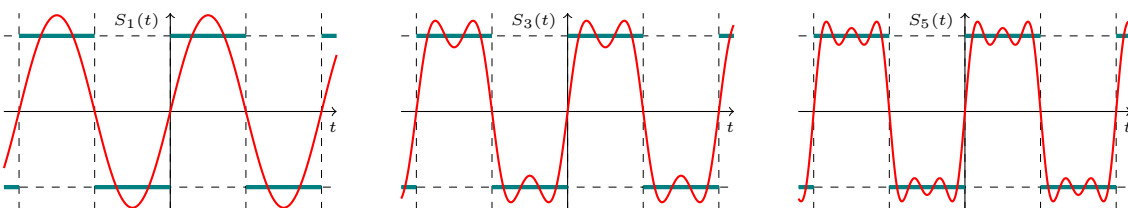
★ Représentons le spectre de f :

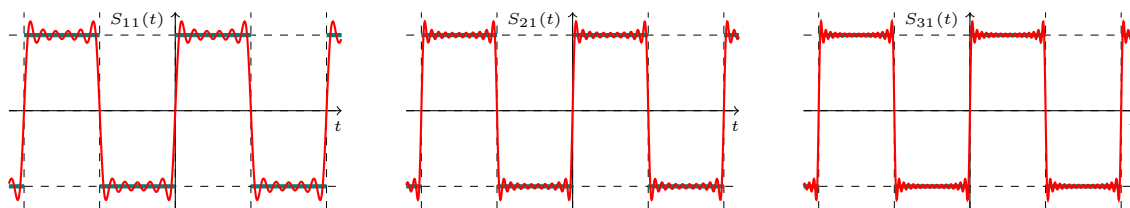


Seuls les multiples impairs de la fréquence fondamentale sont présents dans le spectre. La décroissance des coefficients est plutôt lente : les coefficients c_n sont de l'ordre de $\frac{1}{n}$. C'est lié au fait que f n'est même pas continue. Cela nous empêche de donner une interprétation simple du spectre. Il y a certes une basse fréquence forte et bien visible mais les autres fréquences ne sont pas assez faibles pour être négligées. Ce spectre est riche et il faudra beaucoup de termes pour recomposer de manière satisfaisante le signal.

★ Regardons cela plus en détail. Notons $S_N(t)$ la somme partielle $S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\pi t}$.

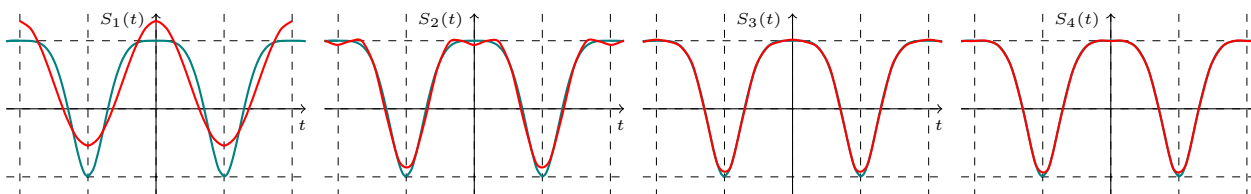
Par exemple, $S_1(t) = -\frac{2i}{\pi} e^{-i\pi t} + \frac{2i}{\pi} e^{i\pi t} = \frac{4}{\pi} \sin(\pi t)$. Représentons les premières sommes partielles et comparons-les à f .





On constate bien que la série converge assez lentement vers f . Même avec une centaine de termes nous n'obtenons pas une approximation satisfaisante de f . Et nous observons le phénomène de Gibbs : au niveau des discontinuités, des pics apparaissent. Si on augmente N ils se concentreront près du point de discontinuité mais leur taille ne se réduira pas.

À titre de comparaison, voici ce qu'on obtient pour une fonction³ de classe C^2 . La convergence est bien plus rapide, les coefficients étant ici de l'ordre de $\frac{1}{n^4}$. L'approximation par la série de Fourier est très satisfaisante avec seulement quatre fréquences ! Notons tout de même que les points où l'approximation est la moins bonne sont ceux où la fonction est la moins régulière, en l'occurrence là où elle n'est pas de classe C^3 .



★ Terminons par l'égalité de Parseval : $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$, soit $1 = \sum_{n \in \mathbf{Z} \text{ impair}} \frac{4}{\pi^2 n^2}$.

On en déduit la somme de la série suivante : $\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$.

À retenir

- ★ Savoir calculer la décomposition de Fourier d'une fonction périodique.
- ★ Savoir interpréter son spectre en termes de répartition des fréquences.
- ★ Savoir étudier la vitesse de convergence d'une série de Fourier et estimer la qualité de l'approximation d'une fonction par les sommes partielles de cette série.
- ★ Comprendre que la décomposition en série de Fourier n'est qu'une décomposition parmi d'autres. Le point de vue géométrique présenté dans ce chapitre s'applique à bien d'autres décompositions.

Citons par exemple les décompositions en **polynômes orthogonaux** (utilisées notamment dans des problèmes d'optiques), en **fonctions de Bessel** (par exemple pour décrire la vibration d'un tambour), en **ondelettes** (utilisées pour la compression d'images jpeg).

3. Il s'agit de la fonction 2-périodique définie sur $[-1, 1]$ par $t \mapsto \cos(\pi t^2)$. Ses coefficients de Fourier ont été déterminée sous forme numérique approchée : $a_0 \approx 0,37$, $a_1 \approx 0,91$, $b_1 = 0$, $a_2 \approx -0,35$, etc.

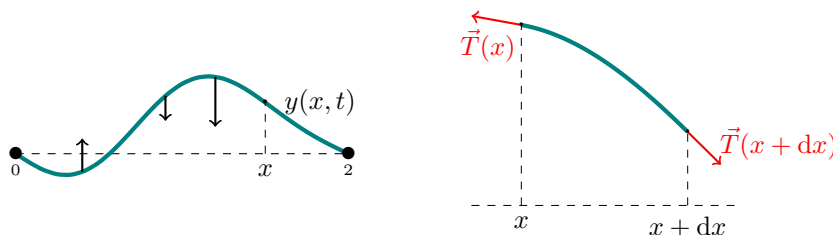
Équations des ondes et de la chaleur

On présente dans ce chapitre deux problèmes fondamentaux : la résolution de l'équation de la chaleur que l'on doit à Fourier et qui l'a conduit à introduire ses fameuses séries ; et la résolution de l'équation des ondes qui repose sur les mêmes arguments mathématiques. Le premier problème est central dans l'étude de la conduction thermique, le second permet de décrire des problèmes de vibration et de propagation d'ondes.

Ils constituent des exemples de référence dans l'histoire des sciences. Certains problèmes en sont des variations que l'on résout en se ramenant au problème de référence. D'autres se résolvent en utilisant la même méthode (la recherche des solutions stationnaires).

1 Présentation du problème

On considère une corde élastique de longueur L fixée en ses extrémités. On note $y(x, t)$ la hauteur de la corde au niveau de l'abscisse x à l'instant t .



On néglige son poids et les frottements. Les seules forces en présence sont des forces de tension. Pour établir l'équation du mouvement, on applique le principe fondamental de la dynamique à une portion infinitésimale de la corde.

L'équation que l'on arrive à établir de la sorte est une équation qu'on ne sait pas résoudre explicitement. Comme dans l'étude du pendule simple, on va faire l'hypothèse que les vibrations de la corde restent très faibles au cours du temps. Cela autorise à effectuer une linéarisation et l'équation se simplifie en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

avec $\nu = \sqrt{\frac{T_0}{m}}$ où m est la masse de la corde et T_0 sa tension.

Si on considère une plaque vibrante, on ajoute une dimension spatiale et l'équation des ondes satisfaite par la fonction $y(x_1, x_2, t)$ devient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \Delta y = \nu^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)$$

Cette équation permet de modéliser presque tous les problèmes de vibrations ou de propagation d'ondes : cordes de guitare, peaux de tambours, poutres et bâtiments, propagation du son, de la lumière, d'ondes électromagnétiques, etc.

Reposons le problème complètement. On cherche les fonctions $y(x, t)$ vérifiant les conditions suivantes

$$\text{Équation des ondes : } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\text{Conditions au bord : } \forall t > 0 \quad y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L, t) = 0 \quad (2)$$

1.1 Solutions stationnaires

Avant de déterminer la solution générale du problème, nous allons chercher des solutions particulières appelées **solutions stationnaires**. Ce sont les solutions y **non nulles** de (1) et (2) s'écrivant sous la forme

$$y(x, t) = u(x)v(t).$$

Autrement dit, ce sont les solutions pour lesquelles il est possible de séparer la composante spatiale de la composante temporelle. Ces fonctions constitueront une base de solutions qui nous permettra ensuite de décrire n'importe quelle solution.

Mais ces solutions stationnaires sont plus que cela. Elles sont les **modes propres de vibration** de la corde ; ce sont en quelque sorte les façons les plus « naturelles » qu'a la corde de vibrer. Ces modes propres sont associés aux fréquences propres de la corde, ou encore fréquences de résonance de la corde. Si on excite la corde avec une fréquence égale à une de ses fréquences propres, la corde va se mettre à vibrer fortement selon le mode propre correspondant.

- Afin de les déterminer, injectons $y(x, t) = u(x)v(t)$ dans l'équation des ondes :

$$u(x)v''(t) = \nu^2 u''(x)v(t).$$

- Séparons les variables (les x d'un côté, les t de l'autre) :

$$\frac{v''(t)}{\nu^2 v(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)}.$$

On obtient une égalité entre une fonction de la variable t et une fonction de la variable x . Cela n'est possible (et n'a de sens) que si ces fonctions sont constantes :

$$\frac{v''(t)}{\nu^2 v(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)} = \lambda.$$

Finalement, on obtient deux équations différentielles ordinaires que l'on sait résoudre !

$$u''(x) - \lambda u(x) = 0 \quad \text{et} \quad v''(t) - \nu^2 \lambda v(t) = 0.$$

Tout d'abord, rappelons que la solution nulle n'est pas une solution stationnaire. Ensuite, pour s'épargner quelques arguments mathématiques sans grand intérêt, utilisons un argument physique : si $\lambda > 0$, la seconde équation conduit à une solution $v(t)$ qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (ou qui est nulle, ce qui est exclus). Compte tenu de nos hypothèses, cela n'a aucun sens physique.

- Passons à la résolution de la première équation et utilisons les conditions au bord. Si $\lambda = 0$, on obtient $u(x) = ax + b$. Or, on sait que $y(0, t) = u(0)v(t) = 0$. Comme v ne peut pas être la fonction nulle, on déduit $u(x) = 0$, donc $b = 0$. De même $y(L, t) = 0$ donc $u(L) = 0$ et on déduit $a = 0$. Finalement $u(x) = 0$ et la fonction y est nulle, ce qui était exclus.

On en déduit que $\lambda < 0$ et la résolution aboutit dans ce cas à

$$u(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

De plus, d'après les conditions au bord, on déduit $u(0) = 0$, donc $a = 0$. De même $u(L) = 0$, donc (pour ne pas trouver de nouveau une solution nulle), on déduit $\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$. On connaît les racines de la fonction sinus, donc $\sqrt{-\lambda}L = k\pi$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ et finalement

$$\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}.$$

Enfin, on obtient l'expression de u :

$$u(x) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k \in \mathbf{N}^*, b \in \mathbf{R}^*.$$

Le rôle de b est sans importance ici, contrairement à celui de k : chaque valeur de k va conduire à un mode propre de vibration de la corde.

- Dernière étape : la résolution de l'équation de $v(t)$. On connaît désormais l'expression de λ et on résout sans difficulté :

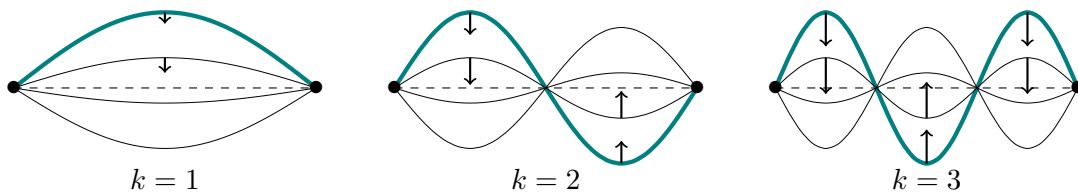
$$v(t) = c \cos\left(\frac{k\pi\nu}{L}t\right) + d \sin\left(\frac{k\pi\nu}{L}t\right).$$

- Les solutions stationnaires de notre problème sont ainsi les fonctions de la forme

$$y_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(A \cos\left(\nu\frac{k\pi}{L}t\right) + B \sin\left(\nu\frac{k\pi}{L}t\right) \right),$$

pour $k \geq 1$ et $A, B \in \mathbf{R}$.

Chaque valeur de k correspond à un mode propre de vibration de la corde. Représentons les trois premiers modes : la partie spatiale $u(x)$ représente la forme de la corde, la partie temporelle $v(t)$ la variation de son amplitude au cours du temps. Sa fréquence qui dépend de k et donc du mode considéré est la fréquence de vibration du mode. Plus on augmente k et plus les modes associés ont des fréquences de vibration élevées.



1.2 Solution générale du problème

L'équation des ondes est une équation linéaire (ce qui est logique puisqu'on a linéarisé pour l'obtenir). Les solutions stationnaires constituent une base de solutions pour ce problème. Cela signifie qu'une solution quelconque du problème peut s'écrire comme une combinaison linéaire (infinie) de solutions stationnaires :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(A_k \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L}t\right) \right).$$

Cette expression peut sembler un peu lourde mais elle est en fait très intéressante sous cette forme. Elle permet d'interpréter des vibrations comme des combinaisons de solutions stationnaires et ainsi de les analyser en termes de fréquences. Les coefficients A_k et B_k permettent ainsi de décrire le spectre de la vibration.

1.3 Solution particulière

Lorsqu'on résout une équation différentielle linéaire, on commence par déterminer la forme générale de ses solutions, puis en considérant des conditions initiales, on détermine les valeurs correspondantes des paramètres libres de ces solutions. Nous allons faire de même ici en introduisant maintenant des conditions initiales.

L'équation des ondes est par rapport à la variable t une équation du second ordre. Ainsi, pour caractériser pleinement une solution, il faut se donner deux conditions initiales : sa position initiale et sa vitesse initiale. Dans notre problème, cela signifie qu'on connaît la forme initiale de la corde, donnée par une fonction que nous noterons $y_0(x)$ et sa vitesse initiale en tout point, donnée par une fonction $v_0(x)$:

$$\text{Conditions initiales : } \forall x \in]0, L[\quad y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

Ces données doivent nous permettre de déterminer la solution du problème correspondante, c'est-à-dire, dans l'expression plus haut, de déterminer les valeurs de tous les coefficients A_k et B_k correspondant à ces conditions initiales.

Déterminer cette infinité de coefficients à partir de ces deux seules conditions peut sembler irréalisable mais il se produit un petit miracle. Prenons notre solution générale et écrivons la première condition :

$$y(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(A_k \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L} \cdot 0\right) + B_k \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L} \cdot 0\right) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = y_0(x).$$

On reconnaît une série de Fourier ! Plus précisément, il s'agit d'une série de Fourier de fonction impaire et $2L$ -périodique. D'après notre condition, cette série est égale sur $]0, L[$ à la fonction y_0 (que l'on peut virtuellement prolonger en une fonction impaire $2L$ -périodique). On en déduit que les coefficients A_k sont les coefficients de Fourier de y_0 . Nous pouvons ainsi donner leur expression :

$$A_k = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L y_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

De même, en s'autorisant à dériver sous le signe somme, on peut écrire la seconde condition :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(-A_k \nu \frac{k\pi}{L} \sin\left(\nu \frac{k\pi}{L} \cdot 0\right) + B_k \nu \frac{k\pi}{L} \cos\left(\nu \frac{k\pi}{L} \cdot 0\right)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\nu k\pi}{L} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = v_0(x).$$

On reconnaît encore une série de Fourier et on déduit comme ci-dessus

$$\frac{\nu k\pi}{L} B_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

On obtient ainsi les valeurs des coefficients B_k . Les coefficients A_k et B_k sont alors parfaitement connus et on a donc trouvé (sous forme d'une série de fonctions) l'unique solution du problème.

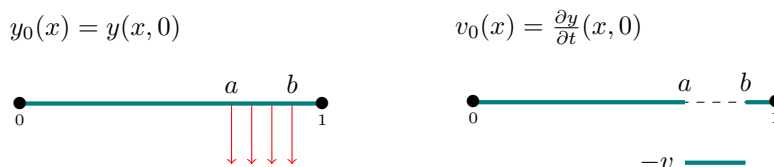
1.4 Un exemple

Il faut reconnaître que la résolution de l'équation des ondes présente quelques lourdeurs et difficultés. Mais ce problème est désormais résolu et l'appliquer à des cas concrets revient à utiliser bêtement des formules.

Nous allons étudier ici le cas de la corde frappée (on pourra penser à une corde de piano). On considère une corde de longueur 1 pour simplifier. Elle est initialement au repos, puis on la frappe. On souhaite décrire la vibration créée par ce choc.

Tout ce que nous avons à faire est de traduire mathématiquement les conditions initiales de ce problème puis appliquer les formules obtenues précédemment.

La corde est initialement au repos, donc la forme initiale de la corde est donnée par $y_0(x) = 0$. Le choc se traduit par une impulsion donnée à la corde. On peut le modéliser en considérant que dans la zone où la corde est frappée, celle-ci possède une vitesse initiale non nulle. Pour faire simple, nous allons supposer que la vitesse initiale est donnée par $-v$ sur l'intervalle où a lieu le choc, et nulle partout ailleurs. Ainsi, la vitesse initiale $v_0(x)$ est donnée par le graphe ci-dessous.



Appliquons nos résultats précédents avec $L = 1$. La solution du problème est alors donnée par

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x) (A_k \cos(\nu k\pi t) + B_k \sin(\nu k\pi t)),$$

avec

$$A_k = 2 \int_0^1 y_0(x) \sin(k\pi x) dx = 0$$

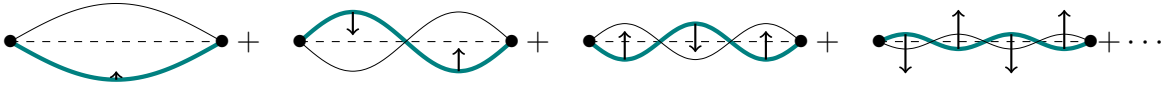
et

$$B_k = \frac{2}{\nu k \pi} \int_0^1 v_0(x) \sin(k\pi x) dx = \frac{2v(\cos(k\pi b) - \cos(k\pi a))}{\nu k^2 \pi^2}.$$

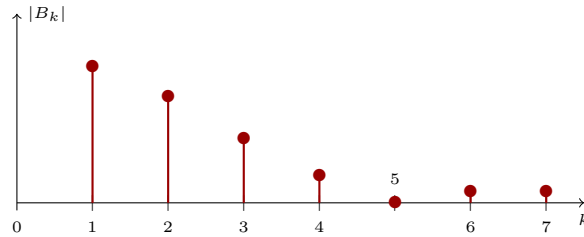
Finalement, la vibration de la corde frappée est donnée par

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2v(\cos(k\pi b) - \cos(k\pi a))}{\nu k^2 \pi^2} \sin(k\pi x) \sin(\nu k \pi t).$$

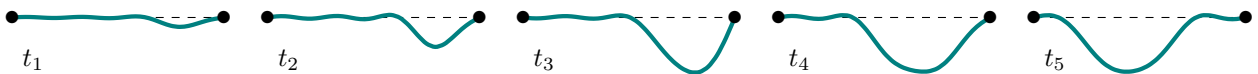
On peut interpréter cette somme en disant que cette vibration est une superposition de vibrations élémentaires :



Chacune vibre à une certaine fréquence et leurs amplitudes sont données par les coefficients B_k que nous avons calculés. Ils définissent le spectre de la corde frappée.



Enfin et surtout, notre expression permet de représenter la vibration de la corde au cours du temps. Nous avons représenté ci-dessous la somme des sept premiers termes de la série pour cinq valeurs successives de t . On observe que la corde commence à vibrer là où on l'a frappée, puis l'onde ainsi créée va se propager vers la gauche de la corde. Comme notre modèle est sans frottement, l'onde continuera indéfiniment à se propager le long de la corde avec des réflexions aux extrémités.



Rappelons que notre modèle n'est valable que pour de très petites oscillations de la corde. Les amplitudes de nos figures sont exagérées afin que ces dernières soient lisibles.

2 Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est mathématiquement du même type que l'équation des ondes. Sa résolution est parfaitement analogue. Nous allons en reprendre les étapes sans détailler les calculs.

2.1 Résolution du problème de référence

Présentation du problème

On considère une tige métallique de longueur L . Elle est dans un milieu isolant et ses extrémités sont en contact avec un milieu à 0 degré. On cherche à décrire l'évolution de la température dans la tige.

On note $T(x, t)$ la température à l'abscisse x de la tige à l'instant t . L'étude locale des transferts thermiques dans la tige permet d'établir l'équation de la chaleur qui décrit l'évolution de T au cours du temps. On peut l'interpréter comme une équation de propagation de la chaleur dans la tige. Notre problème est ainsi décrit par :

$$\text{Équation de la chaleur : } \frac{\partial T}{\partial t} = c\Delta T = c\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\text{Conditions au bord : } \forall t > 0 \quad T(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad T(L, t) = 0 \quad (2)$$

où c est le coefficient de diffusivité thermique de la tige.

Solutions stationnaires

On cherche les solutions de la forme $T(x, t) = U(x)V(t)$. On injecte dans l'équation de la chaleur, et après séparation des variables, on obtient les équations

$$u''(x) - \lambda u(x) = 0, \quad v'(t) - \lambda cv(t) = 0.$$

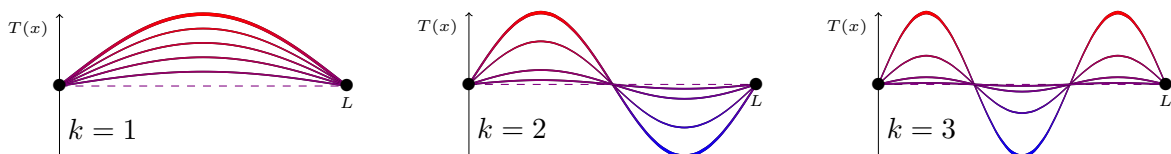
La résolution de la première équation en tenant compte des conditions au bord permet de montrer que $\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ et $u(x) = b \sin(\frac{k\pi}{L}x)$, $b \in \mathbf{R}^*$.

La résolution de la seconde conduit alors à $v(t) = de^{-ct\frac{\pi^2 k^2}{L^2}}$.

Les solutions stationnaires du problème sont ainsi les fonctions de la forme

$$T_k(x, t) = A \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)e^{-ct\frac{\pi^2 k^2}{L^2}}, \quad k \in \mathbf{N}^*, A \in \mathbf{R}^*.$$

On peut représenter les premières solutions stationnaires. Les répartitions de température sont des sinusoides qui convergent vers 0 au cours du temps. La convergence vers 0 est d'autant plus rapide que k est élevé.



Contrairement au cas des problèmes de vibration, il est difficile de donner un sens physique à ces répartitions de température particulières.

Solution générale du problème

Les solutions du problème sont des combinaisons linéaires infinies de solutions stationnaires :

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-ct \frac{\pi^2 k^2}{L^2}}.$$

Condition initiale

L'équation de la chaleur est d'ordre 1 en la variable t . Une seule condition initiale suffit à déterminer une solution particulière du problème.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, la température dans la tige est décrite par une fonction $T(x, 0) = T_0(x)$. En considérant cette condition dans la solution générale ci-dessus, on obtient une série de Fourier et on est capable d'exprimer les coefficients A_k en fonction de la température initiale T_0 :

$$\forall k, \quad A_k = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Le problème est ainsi complètement résolu. Remarque importante : le terme exponentiel se rapproche très rapidement vers 0 lorsque on augmente k . Dans les cas les plus standards, cela se traduit par une convergence extrêmement rapide de la série. En pratique, on arrive à obtenir des résultats très précis en ne calculant que les tous premiers termes de la série.

2.2 Une variation

Considérons maintenant un problème légèrement différent. Imaginons une porte de réfrigérateur. Elle est en contact en son bord intérieur avec un milieu à 4° et en son bord extérieur avec le milieu ambiant qu'on suppose à 20° . Le problème est ainsi décrit par

$$\text{Équation de la chaleur : } \frac{\partial T}{\partial t} = c\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\text{Conditions au bord : } \quad \forall t > 0 \quad T(0, t) = 4 \quad \text{et} \quad T(L, t) = 20 \quad (2)$$

Cela ressemble au problème précédent mais avec une légère différence. Lorsqu'on résout une équation différentielle linéaire, on commence par résoudre l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de l'équation et on conclut que les solutions sont toutes de la forme « solution homogène + solution particulière ».

Il suffit de comprendre que notre problème de référence est ici l'équivalent de l'équation homogène associée. En effet, si T_h est une solution du problème général traité dans la partie précédente et si T_p est une solution de ce nouveau problème, alors la linéarité du problème permet de vérifier facilement que $T_h + T_p$ est encore une solution de ce nouveau problème (par exemple, pour les conditions au bord, il s'agit de remarquer que $0 + 4 = 4$ et $0 + 20 = 20$).

Ainsi, pour résoudre ce nouveau problème, il suffit d'en déterminer une solution particulière. Ici, la solution particulière la plus simple (et peut-être la plus intéressante) est

la **solution à l'équilibre**.

Nous cherchons donc la solution à l'équilibre du problème, c'est-à-dire la solution qui reste constante au cours du temps. Autrement dit, elle ne dépend que de la variable x : $T_{eq}(x, t) = T_{eq}(x)$.

Dans ce cas, l'équation de la chaleur devient $0 = cT''_{eq}(x)$. On l'intègre deux fois et on obtient $T_{eq}(x) = ax + b$. D'autre part, les conditions au bord imposent que $T_{eq}(0) = 4$ et $T_{eq}(L) = 20$. On en déduit que $b = 4$ et $a = \frac{16}{L}$. La solution à l'équilibre du problème est

$$T_{eq}(x) = \frac{16}{L}x + 4.$$

À l'équilibre, la température se répartit linéairement dans la porte, ce qui ne devrait étonner personne.

La solution générale du problème s'écrit alors $T_{eq} + T_h$ où T_h est la solution du problème de référence. On obtient ainsi

$$T(x, t) = \frac{16}{L}x + 4 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)e^{-ct\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}.$$

On constate sans surprise que de telles solutions convergent au cours du temps vers la solution à l'équilibre.

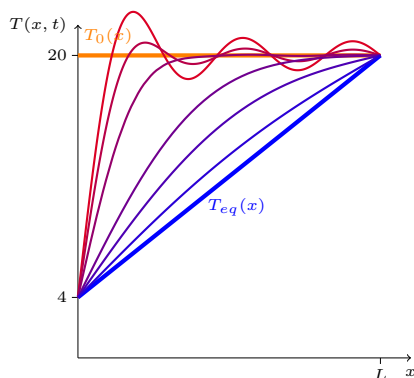
Enfin, si on connaît la température initiale T_0 dans la porte, on peut en déduire les coefficients A_k de la même manière que dans la partie précédente. Il faut juste s'y ramener ainsi :

$$T_0(x) - T_{eq}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Les coefficients A_k sont alors donnés par $A_k = \frac{2}{L} \int_0^L (T_0(x) - T_{eq}(x)) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$.

Par exemple, si $L = 0,1$, $c = 10^{-6}$ et $T_0(x) = 20^\circ$ (on vient de brancher le réfrigérateur) on calcule $A_k = 20 \int_0^{0,1} (20 - 160x - 4) \sin(10k\pi x) dx$. On a ainsi calculé les cinq premiers coefficients de la solution et représenté pour différentes valeurs de t la solution

$$T(x, t) \approx \sum_{k=1}^5 \sin(10k\pi x) e^{-10^{-4}k^2\pi^2 t}.$$



On remarque que pour $t \approx 0$, notre graphe n'est pas satisfaisant car nous n'avons pas pris assez de coefficients pour notre approximation. Mais dès que t augmente suffisamment, les termes élevés de la série convergeant très vite vers 0, notre approximation devient précise. À partir de la cinquième courbe, on pourrait se contenter du premier terme de la série et obtenir des graphes quasiment identiques.

À retenir

Méthode des solutions stationnaires Pour toute une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles avec conditions au bord nulles, la méthode suivante est applicable :

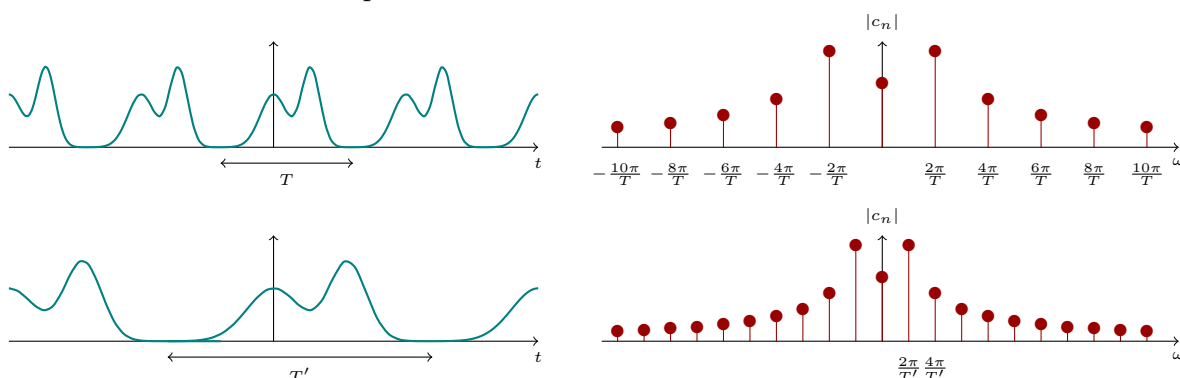
- ★ **Recherche des solutions stationnaires**, *i.e.* de la forme $f^\circ(\text{espace}) \times f^\circ(\text{temps})$: injection dans l'équation, séparation des variables, résolution de l'équation spatiale en utilisant les conditions au bord, résolution de l'équation temporelle.
- ★ La **solution générale** s'écrit alors comme une combinaison linéaire infinie de solutions stationnaires.
- ★ Étant données des **conditions initiales**, on peut déterminer les coefficients de cette combinaison. Il faut pour cela reconnaître que les séries sont des décompositions dans une base orthonormée de fonctions (analogues à des séries de Fourier) et obtenir les coefficients comme des projections dans cette base.
- ★ Lorsque l'équation possède un second membre ou que les conditions au bord sont non nulles, on résout le problème homogène associé (voir ci-dessus) et on cherche une solution particulière du problème, par exemple sa solution à l'équilibre.

Transformée de Fourier

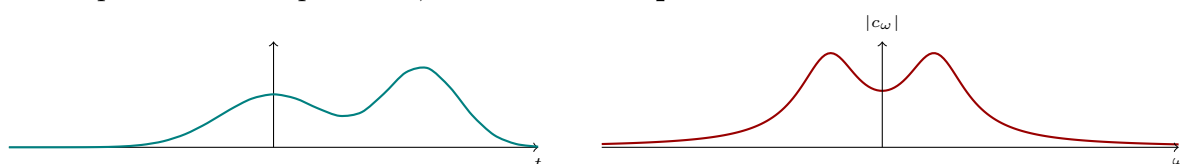
1 Introduction

Les séries de Fourier permettent de décomposer une fonction périodique et de décrire l'amplitude des différentes fréquences qui la composent. On peut ainsi représenter une telle fonction par son spectre discret. Peut-on faire une telle analyse fréquentielle pour une fonction qui ne serait pas périodique ?

Regardons des exemples de fonctions de différentes périodes avec leurs spectres, mais représentons les spectres en indiquant en abscisse, non pas les multiples de la fréquence fondamentale mais les fréquences elles-mêmes.



La période de cette seconde fonction est plus grande que celle de la première. Cela se traduit par la présence de fréquences plus basses dans le second spectre que dans le premier et globalement par un spectre plus resserré. Si on considère des fonctions de périodes de plus en plus grandes, on aura des spectres contenant des fréquences de plus en plus proches les unes des autres. À la limite, avec une fonction de période infinie (une fonction non périodique en fait), on aimerait pouvoir définir un spectre contenant toutes les fréquences réelles possibles, c'est-à-dire un **spectre continu**.



Pour définir cet outil, il faut adapter nos définitions de coefficients de Fourier et passer d'un point de vue discret (fréquences dénombrables, séries) à un point de vue continu (continuum de fréquences, intégrales).

Nous donnons ci-dessous le tableau des correspondances entre les deux théories.

	Discret	Continu
Fonction $f(t)$	T -périodique	intégrable sur \mathbf{R}
Coefficients de Fourier	$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi n}{T}t} dt$	$c_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
Décomposition de Fourier	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c_\omega e^{i\omega t} d\omega$

2 Décomposition de Fourier

On rappelle qu'une fonction f est intégrable sur \mathbf{R} si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ converge. Cette hypothèse garantit que les nombres c_ω introduits plus haut soient bien définis. Ils sont plus usuellement notés $c_\omega = \hat{f}(\omega)$.

Définition

Soit f une fonction intégrable sur \mathbf{R} . On appelle **transformée de Fourier** de f l'application

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{C} \\ \omega &\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Remarques

- ★ Le nombre complexe $\hat{f}(\omega)$ est défini comme le produit scalaire de la fonction f avec la fonction sinusoïdale $t \mapsto e^{i\omega t}$. Il permet de mesurer la présence plus ou moins élevée de la fréquence ω dans la fonction f .
- ★ Il existe d'autres définitions analogues, plus adaptées à certaines considérations physique (fréquences/pulsations) ou mathématiques :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi\omega t} dt \quad \text{ou encore} \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

La théorie présentée ici reste la même avec ces définitions, seules quelques constantes peuvent être modifiées dans les formules.

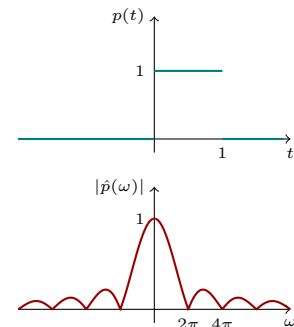
- ★ L'hypothèse d'intégrabilité n'est pas tout à fait nécessaire, tout d'abord parce que l'intégrabilité au sens de Fourier est un peu plus large que l'intégrabilité classique sur \mathbf{R} mais également car il existe une théorie plus large, la **théorie des distributions**, qui permet de définir une transformée de Fourier pour une classe bien plus grande de fonctions.

Exemple

Soit $p = \mathbf{1}_{[0,1]}$ la fonction « porte » définie par $p(t) = 1$ si $0 \leq t \leq 1$ et $p(t) = 0$ sinon. Sa transformée de Fourier est définie par

$$\begin{aligned} \hat{p}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega} - 1}{-i\omega} \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}} - e^{i\frac{\omega}{2}}}{-i\omega} = 2e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} = e^{-i\frac{\omega}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

où sinc désigne la fonction **sinus cardinal** définie par $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Notre calcul n'est pas valable en $\omega = 0$. On obtient $\hat{p}(0) = \int_0^1 1 dt = 1$.



Ce spectre n'est pas simple à interpréter. Comme pour la fonction créneau, il contient beaucoup de fréquences. Disons simplement que les basses fréquences sont les plus importantes.

La transformée de Fourier d'une fonction décrit sa répartition de toutes les fréquences réelles. Il est alors possible de décomposer cette fonction en une somme intégrale de fonctions sinusoïdales affectées des coefficients donnés par la transformée.

Théorème d'inversion

Soit f une fonction intégrable. Supposons que sa transformée \hat{f} soit également intégrable. Alors on peut recomposer f à partir de sa transformée de Fourier sous la forme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Remarques

- ★ Le facteur $\frac{1}{2\pi}$ n'a pas d'interprétation particulière, ce n'est qu'un terme de renormalisation.
- ★ Attention, alors que dans la version discrète, on distinguait facilement la formule des coefficients de Fourier et la série de Fourier, on peut ici confondre la formule des coefficients $\hat{f}(\omega)$ et la recombinaison de f sous forme intégrale. Le fait que ces formules soient analogues à du sens et correspond à des propriétés intéressantes de la transformée mais est aussi source de confusion.

Démonstration

Nous ne donnons qu'une esquisse de preuve, valable pour une fonction f de classe C^1 , à **support compact** (c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle borné).

L'idée principale de la preuve repose sur ce qui a été dit en introduction : la transformée de Fourier dérive des séries de Fourier après passage du discret au continu.

D'après notre hypothèse, on peut se donner un intervalle I contenant toutes les valeurs non nulles de f . Notons T sa longueur et considérons la fonction T -périodique égale à f sur I .

On écrit sa série de Fourier :

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{in \frac{2\pi}{T} t}, \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_I f(t) e^{-in \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right).$$

$$\text{Ainsi, } \forall t \in I, f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\frac{NT}{2}}^{\frac{NT}{2}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{i \frac{2\pi n}{T} t}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $\omega \mapsto \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t}$ sur l'intervalle $[-N\pi, N\pi]$. En considérant des intervalles de plus en plus grand afin de faire tendre T vers $+\infty$, on obtient à la limite :

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N\pi}^{N\pi} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Précisons bien que les passages à la limite que nous avons évoqués nécessitent que l'on vérifie certaines hypothèses avant de conclure !

Pour étendre le résultat à toutes les fonctions intégrables, il faut utiliser des résultats de densité des fonctions de classe C^1 à support compact.

Exemple

Reprenons notre fonction p . Sa transformée de Fourier n'est pas une fonction intégrable au sens classique mais l'est au sens de Fourier. Nous pouvons écrire la décomposition de Fourier de p :

$$\forall t, p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\omega}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Inversons les rôles de nos variables : remplaçons t par $-\omega$ et ω par t :

$$\forall \omega, p(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{t}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) e^{-it\omega} dt.$$

On reconnaît à droite la définition d'une transformée de Fourier. On en déduit ainsi, sans avoir fait de calcul, que la transformée de la fonction $t \mapsto e^{-i\frac{t}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)$ est la fonction $\omega \mapsto 2\pi p(-\omega) = 2\pi \mathbf{1}_{[-1,0]}$.

Comme pour les séries de Fourier, la décomposition de Fourier en somme intégrale est unique. C'est ce que précise la proposition suivante.

On peut voir la transformation $f \mapsto \hat{f}$ comme un changement de repère qui permet de passer du point de vue temporel au point de vue fréquentiel. Le théorème d'inversion fournit la transformation inverse, et on a finalement équivalence entre la donnée d'une fonction ou de sa transformée.

Propriété

L'application qui à une fonction intégrable f associe sa transformée \hat{f} est injective : si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

Démonstration

Supposons que f et g sont deux fonctions intégrables qui vérifient $\hat{f} = \hat{g}$. Notons alors $h = f - g$. On peut vérifier que $\hat{h} = \hat{f} - \hat{g} = 0$. Ainsi h est une fonction intégrable dont la transformée de Fourier est aussi intégrable. D'après le théorème d'inversion, pour tout t , $h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0$. Donc $h = 0$ et finalement $f = g$.

3 Propriétés générales

Nous supposons dans la suite que toutes les fonctions considérées admettent une transformée de Fourier.

Propriété

- ★ **Linéarité** : $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$.
- ★ Si f est une fonction réelle paire, alors \hat{f} l'est aussi.
- ★ Si f est une fonction réelle impaire, alors \hat{f} est imaginaire pure impaire.

Propriété : lemme de Riemann-Lebesgue

De même que la suite des coefficients de Fourier c_n tend vers 0, si f est une fonction intégrable, alors $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

Et comme pour les coefficients de Fourier, plus la fonction est régulière, plus sa transformée converge rapidement vers 0 en l'infini.

Démonstration

Donnons la preuve dans le cas des fonctions de classe C^1 à support compact. On peut en déduire le cas général en utilisant la densité de ces fonctions dans l'ensemble des fonctions intégrables.

Soit f une fonction de classe C^1 nulle en dehors d'un intervalle borné $[a, b]$. Calculons sa transformée à l'aide d'une intégration par partie

$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b f(t)e^{-i\omega t} dt = \left[f(t) \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} dt.$$

Par hypothèse, $f(a) = f(b) = 0$ et d'autre part, f est continue donc bornée sur $[a, b]$ et l'exponentielle complexe est bornée par 1 en module. En notant M un majorant de $|f|$, on obtient $|\hat{f}(\omega)| \leq \int_a^b M \cdot \frac{1}{|\omega|} dt = \frac{M(b-a)}{|\omega|}$. On en déduit bien que $\hat{f}(\omega)$ converge vers 0 quand ω tend vers $\pm\infty$.

4 Manipulations

Propriété : décalage et déphasage

- ★ Soient α et β deux nombres réels. Soit g définie par $g(t) = f(t + \alpha)$. Alors sa transformée est donnée par $\hat{g}(\omega) = e^{i\alpha\omega} \hat{f}(\omega)$.
- ★ Soit h définie par $h(t) = e^{it\beta} f(t)$. Alors sa transformée est donnée par $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega - \beta)$.

Interprétons : la fonction g est obtenue en décalant le graphe de la fonction f de α vers la gauche. Autrement dit, les graphes de f et g ont exactement la même allure. Il est évident que ces deux fonctions seront composées des mêmes fréquences : en module, leurs transformées de Fourier sont identiques, le terme $e^{i\alpha\omega}$ est un terme de déphasage qui n'affecte que l'argument de la transformée.

Réciproquement, la fonction h est obtenue en déphasant la fonction f et cela se traduit par un décalage de la transformée de Fourier. Cela est trivial si f est une fonction constante. Dans ce cas, son spectre est réduit à un terme en 0. La multiplication par $e^{i\beta t}$ le transforme en une fonction sinusoïdale ne contenant qu'une seule fréquence β d'amplitude 1. Son spectre est donc bien décalé de β .

Démonstration

On peut démontrer le premier résultat à l'aide d'un changement de variable dans la définition de $\hat{g}(\omega)$. Il est aussi possible de raisonner à partir du théorème d'inversion. Supposons que le théorème s'applique à la fonction f , alors pour tout t , $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. Récrivons cette égalité en $t + \alpha$:

$$g(t) = f(t + \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega(t+\alpha)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\alpha} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Cette dernière intégrale est donc la décomposition de Fourier de la fonction g . Par unicité de cette décomposition, on déduit que les coefficients $e^{i\omega\alpha} \hat{f}(\omega)$ qui la constituent sont les coefficients de g . Ainsi, pour tout ω , $\hat{g}(\omega) = e^{i\omega\alpha} \hat{f}(\omega)$.

Raisonnons de même pour h :

$$h(t) = e^{it\beta} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\beta} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{it(\omega+\beta)} d\omega.$$

Il s'agit encore d'une décomposition de Fourier, mais avec un décalage des fréquences. Le coefficient $\hat{f}(\omega)$ n'est plus affecté à la fréquence ω mais à la fréquence $\omega + \beta$. Et par un simple changement de variable, on montre que le coefficient $\hat{h}(\omega)$ affecté à la fréquence ω est égal à $\hat{f}(\omega - \beta)$.

Exemple

Soit u la **fonction échelon** définie par $u = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}$ qui vaut 1 sur \mathbf{R}_+ et 0 sur \mathbf{R}_-^* . On souhaite calculer sa transformée de Fourier. Pourtant cette fonction n'est pas intégrable et sa transformée n'est a priori pas définie. Essayons néanmoins de l'obtenir d'une manière formelle.

Remarquons que pour tout t , $u(t) - u(t-1) = p(t)$ où p est notre fonction porte entre 0 et 1. Alors, si on admet que la transformée de u existe, on aurait par linéarité : $\widehat{u(t) - u(t-1)} = \hat{p}$.

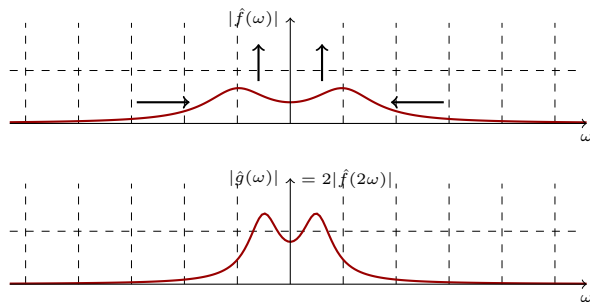
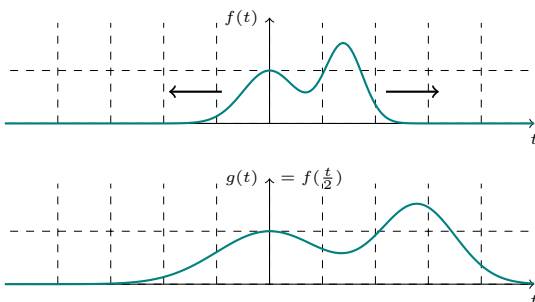
D'après la propriété de décalage, on obtient $\hat{u}(\omega) - e^{-i\omega} \hat{u}(\omega) = \hat{p}(\omega) = \frac{e^{-i\omega} - 1}{-i\omega}$. On en déduit que $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{i\omega}$.

Notons que notre raisonnement n'est pas valable en $\omega = 0$. Il y a bien un problème en cette valeur et la transformée de u n'y est pas bien définie.

Propriété : dilatation et contraction

Soit $a \in \mathbf{R}$ et g définie par $g(t) = f(at)$. Alors $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

C'est une propriété facile à interpréter : lorsqu'on dilate le graphe de f , on contracte son spectre et on l'amplifie. Réciproquement, lorsqu'on contracte le graphe de f , on dilate son spectre et on l'atténue.



Une conséquence de cela est que si une fonction f a ses valeurs concentrées sur un petit intervalle, son spectre sera lui très étalé. Et réciproquement, si une fonction a un spectre très resserré, cela implique que cette fonction s'étale largement dans le temps.

Ces propriétés sont liées au principe d'incertitude de Heisenberg en physique quantique.

Démonstration

Prenons le cas $a > 0$. Avec le changement de variable $u = at$, on obtient

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega \frac{u}{a}} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Exemple

Calculons la transformée de la fonction sinus cardinal. Nous savons déjà que la transformée de la fonction $f(t) = e^{-i\frac{t}{2}} \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)$ est $\hat{f}(\omega) = 2\pi \mathbf{1}_{[-1,0]}$. Posons $g(t) = f(2t) = e^{-it} \text{sinc}(t)$. D'après la propriété de contraction, $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pi \mathbf{1}_{[-2,0]}$. Enfin, utilisons un déphasage : $\text{sinc}(t) = e^{it} g(t)$, donc

$$\widehat{\text{sinc}}(\omega) = \hat{g}(\omega - 1) = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}.$$

Propriété : produit de convolution

On appelle **produit de convolution** de deux fonctions f et g la fonction notée $f * g$, définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du.$$

Alors

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad \text{et} \quad \widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Le produit de convolution est une opération qui apparaît naturellement en traitement du signal ou en traitement de l'image. La transformée de Fourier permet de ramener cette opération un peu compliquée à un simple produit.

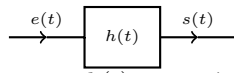
Démonstration

Donnons une preuve formelle de la première proposition, basée sur le théorème d'inversion. Notons e_ω la fonction $t \mapsto e^{i\omega t}$. Un simple calcul permet de montrer que $(f * e_\omega)(t) = e_\omega(t) \hat{f}(\omega)$. Il est également trivial que la convolution est linéaire en chacune des deux fonctions. Décomposons g en une somme intégrale de fonctions e_ω : $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) e_\omega(t) d\omega$. En supposant que la linéarité s'étend aux sommes intégrales, on obtient

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) (f * e_\omega)(t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega) e_\omega(t) d\omega.$$

On déduit de cette nouvelle décomposition que les coefficients de Fourier de $f * g$ sont bien donnés par $\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$.

Exemple



En traitement du signal, l'action d'un filtre est souvent représentée par le schéma ci-contre où $e(t)$ désigne le signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie et $h(t)$ caractérise le filtre (on l'appelle **réponse impulsionnelle** du filtre).

Très souvent, la sortie est donnée par $s(t) = (e * h)(t)$. Pour éviter un calcul délicat, on passe à la transformée et on obtient $\hat{s}(\omega) = \hat{e}(\omega)\hat{h}(\omega)$. La transformée \hat{h} est appelée **fonction de transfert** du filtre. La connaissant, il est facile de calculer \hat{s} en fonction de \hat{e} et de décrire l'action du filtre. Pour retrouver la sortie $s(t)$, il faut tout de même utiliser le théorème d'inversion, mais on fait souvent appel à des tables de transformées usuelles.

Par exemple, si $h(t) = e^{-t}u(t)$ et $e(t) = u(t)$, alors $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ et $\hat{e}(\omega) = \frac{1}{i\omega}$. Donc $\hat{s}(\omega) = \frac{1}{i\omega(1+i\omega)}$. On décompose cette fraction en éléments simples afin de reconnaître des transformées de Fourier : $\hat{s}(\omega) = \frac{1}{i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} = (\widehat{u-h})(\omega)$. Par unicité de la transformée, on en déduit que $s(t) = u(t) - e^{-t}u(t)$.

5 Distribution de Dirac

Définition : distribution de Dirac

On appelle **distribution de Dirac en 0** la « fonction » notée δ_0 définie par :

$$\forall t \neq 0, \delta_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) dt = 1.$$

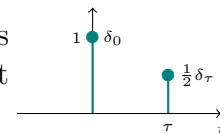
On définit de même la distribution de Dirac en $\tau \in \mathbf{R}$ par :

$$\forall t \neq \tau, \delta_\tau(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\tau(t) dt = 1.$$

Remarques

- ★ Cette définition est contradictoire, aucune fonction réelle ne peut satisfaire ces deux conditions. Comme son nom l'indique, la distribution de Dirac n'est pas une fonction mais une distribution. Comme nous n'avons pas le cadre adéquat pour proposer une définition rigoureuse, nous nous contenterons de celle-là.
- ★ La distribution de Dirac permet de modéliser en physique des événements instantanés (on parle d'**impulsion de Dirac**).
- ★ On la représente avec un graphe sous forme d'un bâton.

Cela rappelle nos spectres discrets du chapitre précédent. Les distributions de Dirac permettent justement de lier formellement spectres discrets et continus.



Propriété

- ★ Au sens des distributions, la fonction échelon est une primitive de la distribution de Dirac : $u' = \delta_0$.
- ★ La distribution de Dirac en 0 est l'élément neutre du produit de convolution : pour toute fonction intégrable f , $f * \delta_0 = f$.
- ★ Sa transformée de Fourier est donnée par : $\forall \omega \in \mathbf{R}, \hat{\delta}_0(\omega) = 1$.

Cette dernière propriété semble contredire le lemme de Riemann-Lebesgue mais ce n'est pas le cas puisque δ_0 n'est pas une véritable fonction intégrable.

Notons aussi qu'elle est l'illustration extrême de la propriété de contraction/dilatation : la distribution de Dirac permet de décrire la fonction la plus concentrée qui soit et son spectre est le plus étalé qui soit.

Démonstration

Utilisons notre définition bancale. Tout repose sur le résultat suivant : $\int_a^b f(t)\delta_0(t)dt$ est égal à $f(0)$ si $0 \in]a, b[$ et à 0 sinon. En effet la distribution de Dirac est nulle en dehors de 0, donc cette intégrale vaut formellement $\int_0^0 f(t)\delta_0(t)dt$ si 0 est dans l'intervalle. Et sur l'intervalle $[0, 0]$, la fonction f est constante égale à $f(0)$. Ainsi $\int_a^b f(t)\delta_0(t)dt = f(0) \int_0^0 \delta_0(t)dt = f(0) \cdot 1$.

Une primitive de δ_0 est donnée par $\int_{-\infty}^t \delta_0(x)dx$. D'après ce qui précède, cette intégrale vaut 1 lorsque $x > 0$ et 0 lorsque $x < 0$. Il s'agit bien de la fonction échelon.

De même, $(f * \delta_0)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\delta_0(u)du = f(t-0) = f(t)$.

Enfin, $\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega \cdot 0} = 1$.

6 Transformée et équations différentielles

Propriété : dérivation et intégration

Soit f une fonction intégrable de classe C^1 de limite nulle en l'infini et telle que f' soit également intégrable.

Alors la transformée de f' est donnée par $\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$.

Supposons maintenant que l'application $t \mapsto tf(t)$ est intégrable.

Alors \hat{f} est dérivable et $\frac{d}{d\omega}\hat{f} = \widehat{(-itf(t))}$.

La première propriété rend la transformation de Fourier particulièrement intéressante pour traiter des problèmes d'équations différentielles. Elle transforme en effet des dérivations en de simples multiplications par t .

Démonstration

Le premier résultat se démontre à l'aide d'une intégration par partie :

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = [f(t)e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -i\omega f(t)e^{-i\omega t}dt = 0 + i\omega\hat{f}(\omega),$$

en utilisant $f(t)e^{-i\omega t} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ d'après l'hypothèse et le fait que l'exponentielle est bornée. De même, en s'autorisant une telle dérivation, on obtient

$$(\hat{f})'(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)e^{-i\omega t}dt.$$

On reconnaît bien la transformée de la fonction $t \mapsto -itf(t)$.

Exemple

On considère l'oscillateur harmonique en régime forcé. Il est modélisé par l'équation différentielle

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t),$$

où ω_0 est la fréquence propre du système et f représente l'excitation du système. On souhaite décrire la réponse du système en fonction des caractéristiques de f .

La solution générale de l'équation homogène $y'' + \omega_0^2 y = 0$ est $y_h(t) = \delta e^{i\omega_0 t} + \mu e^{-i\omega_0 t}$. Il reste à trouver une solution particulière. Supposons qu'il en existe une admettant une décomposition de Fourier.

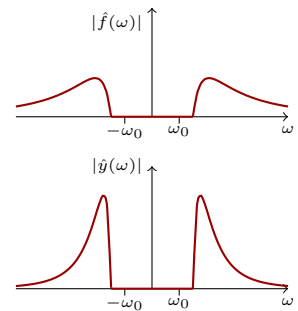
Pour la déterminer, passons à la transformée de Fourier dans l'équation. Par linéarité, $\widehat{y''} + \omega_0^2 \widehat{y} = \widehat{f}$. En utilisant deux fois la propriété de dérivation, $\widehat{y''}(\omega) = i\omega \widehat{y}'(\omega) = -\omega^2 \widehat{y}(\omega)$.

Ainsi on obtient $-\omega^2 \widehat{y}(\omega) + \omega_0^2 \widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$. Il n'y a plus de dérivées ! Et on déduit l'expression de la transformée de y en fonction de celle de f :

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Pour résoudre l'équation, il faut revenir à $y(t)$ à l'aide d'une transformation inverse. Mais avant de le faire, nous pouvons déjà interpréter notre résultat. On remarque déjà qu'il y a un problème pour $\omega = \omega_0$. Si $\widehat{f}(\omega_0) \neq 0$, $\widehat{y}(\omega_0)$ n'est pas défini (ou est infini). C'est le phénomène de résonance : si l'excitation contient la fréquence propre du système, cette composante va faire rentrer le système en résonance et le faire osciller de plus en plus fortement (avec un terme du type $at \sin(\omega_0 t)$).

Si $\widehat{f}(\omega_0) = 0$, il n'y a plus de problème. On observe alors que les fréquences présentes dans la solution y sont les mêmes que celles de f mais avec une amplitude divisée par $\omega_0^2 - \omega^2$. Lorsque ω est très proche de la fréquence propre ω_0 , il s'agit d'une amplification, si elle en est éloignée, il s'agit d'une atténuation. Autrement dit, lorsqu'on excite le système avec f , il amplifie les fréquences de f proches de sa fréquence propre et atténue celles qui en sont éloignées. Il se comporte comme un **filtre passe-bande**.



Terminons la résolution. Remarquons que $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right)$. Nous avons déjà vu que la fonction $\omega \mapsto \frac{1}{\omega}$ est la transformée de la fonction $i u(t)$ où u désigne la fonction échelon. Ici, nous reconnaissons des décalages de cette transformée qui correspondent à des déphasages de l'échelon. On peut en déduire que $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ est la transformée de la fonction

$$g(t) = -\frac{1}{2\omega_0} (e^{i\omega_0 t} i u(t) - e^{-i\omega_0 t} i u(t)) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} u(t).$$

Nous pouvons finalement écrire $\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega)$. On reconnaît la transformée d'un produit de convolution. Par unicité de la transformée de Fourier, on en déduit que

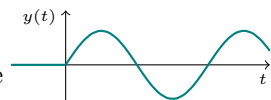
$$y(t) = (f * g)(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{+\infty} \sin(\omega_0 x) f(t - x) dx.$$

Même si cette expression n'est pas simple, nous avons tout de même réussi à l'obtenir alors que nous ne connaissons pas la fonction f explicitement. Mais à vrai dire, l'expression réellement intéressante est celle de $\widehat{y}(\omega)$ que nous avons obtenue plus haut.

Si f est la distribution de Dirac δ_0 , on obtient la solution particulière $y_p(t) = (\delta_0 * g)(t) = g(t)$ et la solution générale est de la forme $y(t) = \delta e^{i\omega_0 t} + \mu e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) u(t)$. Et si on impose les conditions initiales $y(0^-) = y'(0^-) = 0$, on obtient la solution

$$y(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) u(t).$$

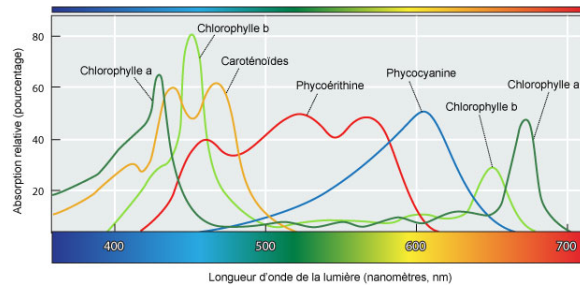
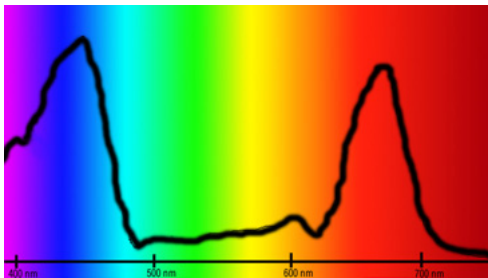
C'est la réponse du système lorsqu'il est initialement au repos et qu'on l'excite avec une simple impulsion instantanée.



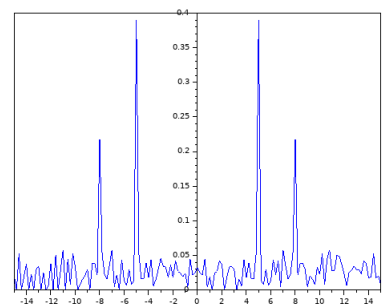
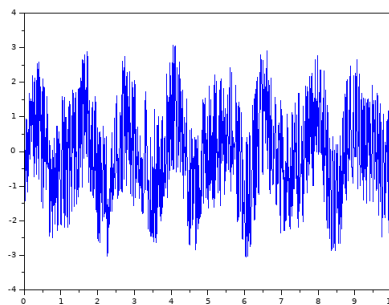
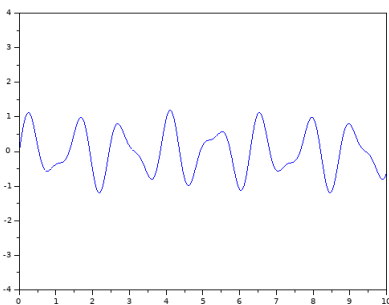
7 Spectres

Terminons ce chapitre par deux exemples où le passage au point de vue spectral permet d'obtenir des informations inaccessibles à partir du point de vue temporel.

★ La chlorophylle est un pigment qui absorbe une partie de l'énergie lumineuse. Étudier l'onde lumineuse ne donne pas grand chose mais étudier son spectre est instructif. Il permet de comprendre que l'absorption est plus ou moins importante en fonction des différentes fréquences qui composent la lumière et d'expliquer la couleur des végétaux. On donne à gauche le spectre d'absorption de la chlorophylle et à droite des spectres de différents pigments. Attention, ils sont représentés à l'envers, avec en abscisse des longueurs d'onde et non des fréquences.



★ Le signal $f(t) = 0,8 \sin(5t) + 0,4 \sin(8t)$ (représenté à gauche) a été émis. Mais la connexion étant bruitée, c'est le signal g (au milieu) qui a été reçu. Il semble impossible de retrouver le signal d'origine. Afin d'y parvenir, on a calculé le spectre du signal reçu ($|\hat{g}|$ à droite).



Alors que le bruit a une intensité de l'ordre de 2, son spectre est d'intensité faible. On peut ainsi considérer que les fréquences du spectre de faible amplitude proviennent de ce bruit tandis que les pics nettement apparents proviennent du signal f . En supprimant toutes les fréquences faibles, on arrive à reconstituer approximativement le signal émis.

À retenir

- ★ La transformée de Fourier est la version continue des coefficients de Fourier de fonctions périodiques.
- ★ Les spectres continus s'interprètent de manière fréquentielle de la même façon que les spectres discrets.
- ★ Calculer une transformée de Fourier nécessite du calcul intégral, mais on peut souvent l'éviter en utilisant les propriétés de la transformée.
- ★ La transformée de Fourier est un outil intéressant pour traiter certaines équations différentielles.