Fonctions de Bessel

Définitions

Les fonctions de Bessel sont des solutions des équations différentielles définies pour $n \in \mathbf{R}$ par

$$(E_n) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Pour $n \in \mathbf{R}$, la fonction de Bessel de première espèce est définie par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(k+n+1)} (\frac{1}{2}x)^{2k+n}.$$

Si $n \notin \mathbf{Z}$, J_n et J_{-n} forment une base de solutions de l'équation (E_n).

Si $n \in \mathbf{Z}$, $J_{-n} = (-1)^n J_n$ et il faut trouver une autre solution. Ainsi, pour $n \in \mathbf{Z}$, on appelle fonction de Bessel de seconde espèce la fonction définie par

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \to n} \frac{J_\lambda(x)\cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)}.$$

Alors J_n et Y_n forment une base de solutions de (E_n).

Propriétés

Pour un réel x donné, les $J_n(x)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{ix\sin(t)}$:

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin(t) - nt)}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t) - nt)dt.$$

Quelques formules :

$$J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J_n'(x), \qquad J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x),$$

$$J_1(x) = -J_0'(x), \qquad (x^nJ_n(x))' = x^nJ_{n-1}(x).$$

Orthogonalité

Pour $n \in \mathbf{N}$, notons par ordre croissant $\omega_1, \omega_2, \ldots$ les zéros positifs de J_n, c'est-à-dire, les réels posititfs ω tels que $J_n(\omega) = 0$. Alors, pour tous i et j distincts,

$$\int_0^1 xJ_n(\omega_i x)J_n(\omega_j x)dx = 0.$$

Cela permet de montrer que les fonctions $x \mapsto J_n(\omega_i x)$ forment une base orthogonale d'un certain espace de fonctions. Il est alors facile de décomposer les fonctions de cet espace en combinaisons linéaires de ces fonctions.

La fonction de Bessel J_0 et ses zéros.