

# Fonctions de plusieurs variables (première partie)

## 1 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Une fonction de plusieurs variables est une fonction définie de  $\mathbf{R}^n$  vers  $\mathbf{R}$ . Nous travaillerons surtout dans le cas  $n = 2$  qui suffit à réaliser les différences existant avec le cas  $n = 1$ , la situation est sensiblement la même pour des valeurs supérieures.

### 1.1 Voisinages

Introduisons des notations qui nous permettront d'étendre à la dimension supérieure les notions de voisinages et de limites.

#### Définition.

Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un élément de  $\mathbf{R}^n$ . Sa **norme euclidienne** est définie par :  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

Étant donnés deux éléments  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbf{R}^n$ , leur **distance euclidienne** est définie par :  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ .

Soit  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$  et  $r > 0$ . La **boule ouverte** de centre  $\mathbf{x}_0$  et rayon  $r$  est définie par :  $B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$ .

#### Définition.

Nous appellerons **voisinage** de  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  toute boule ouverte de centre  $\mathbf{x}$ .

Il existe une définition plus générale des voisinages qui repose sur les notions topologiques d'ensembles ouverts. Nous n'en aurons pas besoin ici, notre définition suffit à étendre naturellement les concepts de fonctions définies au voisinage d'un point et de propriétés valables au voisinage d'un point.

#### Exemples

- La fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$  n'est pas définie en  $(0, 0)$  mais elle est définie au voisinage de  $(0, 0)$ .
- La fonction  $g : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$  est définie sur  $\mathbf{R}^2 \setminus Oy$  mais elle est définie au voisinage de tout point de  $\mathbf{R}^2$ .
- La fonction  $h : (x, y) \mapsto xy$  est positive au voisinage de  $(1, 1)$  ; elle ne l'est pas au voisinage de  $(0, 0)$ .

## 1.2 Limites

### Définition.

Soit  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ . On dit que la suite  $(\mathbf{x}_k)$  converge vers  $\mathbf{x}$  si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0$ .  
On note alors  $\mathbf{x}_k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}$ .

### Définition.

Soit  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction définie au voisinage de  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ .  
La fonction converge vers  $\ell$  en  $\mathbf{x}_0$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r), |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

Nous notons :  $f(\mathbf{x}) \rightarrow_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \ell$ .

- S'il n'y a pas de forme indéterminée, il suffit de faire converger les coordonnées de  $\mathbf{x}$  vers celle de  $\mathbf{x}_0$ . Pour  $f : (x, y, z) \rightarrow x^2y + 3z$  et  $\mathbf{x}_0 = (3, 2, 4)$ , la limite de  $f$  en  $\mathbf{x}_0$  s'obtient naturellement en faisant tendre naturellement  $(x, y, z)$  vers  $(3, 2, 4)$  :  $f(x, y, z) \rightarrow_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 30$ .
- S'il y a une forme indéterminée, la méthode générale consiste à majorer  $|f(\mathbf{x}) - \ell|$  par une expression dépendant de  $\|\mathbf{x} - \ell\|$ , qui par définition converge vers 0 lorsque  $\mathbf{x}$  tend vers  $\ell$ .

Soit  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ . Sa limite en  $(0, 0)$  est a priori indéterminée :  $\frac{0 \cdot 0}{0^2+0^2}$ .

Pour majorer, remarquons la chose suivante :  $(x - y)^2 \geq 0$ , donc  $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ , donc  $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ . Ainsi :  $|f(x, y)| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\|(x, y)\|$ .

Par définition  $\|(x, y)\|$  converge vers 0 lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ . Nous en déduisons par majoration que  $|f(x, y) - 0|$  converge vers 0 en  $(0, 0)$ . Donc  $f(x, y) \rightarrow_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ .

Remarque : un petit résultat établi dans le deuxième exemple est utile dans de nombreux exemples. Pour tous nombres réels  $x$  et  $y$ ,  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

En dimension 1, on visualise facilement ce que peut être une fonction discontinue. Un cas classique est celui d'une fonction qui n'admet pas la même limite à droite et à gauche d'un point. En dimension supérieure, c'est plus complexe : il n'y a pas que deux directions pour s'approcher d'un point (à droite et à gauche), il y en a une infinité. Si la fonction est continue en un point, peu importe la façon de s'approcher du point (*i.e.* peu importe le chemin), la fonction converge toujours vers la même valeur. Cette idée se retrouve dans la caractérisation séquentielle de la limite, identique à celle vue en dimension 1.

**Théorème** (Caractérisation séquentielle de la limite).

Soit  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  et  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ . Alors  $f(\mathbf{x})$  converge vers  $\ell$  en  $\mathbf{x}_0$  si et seulement si pour toute suite  $(\mathbf{x}_n)_n$  convergeant vers  $\mathbf{x}_0$  dans  $\mathbf{R}^n$ , la suite  $f(\mathbf{x}_n)$  converge vers  $\ell$  dans  $\mathbf{R}$ .

Ce point de vue permet souvent de montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

- Soit  $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ . Nous avons de nouveau une forme indéterminée en  $(0, 0)$ . Le raisonnement appliqué à  $f$  dans l'exemple précédent aboutit à :  $|g(x, y)| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ . Avec une telle majoration, nous ne pouvons pas conclure d'une convergence de  $g(x, y)$  en  $(0, 0)$ .

Soit nous n'avons pas réussi à majorer assez finement, soit la fonction ne converge pas en  $(0, 0)$ . Regardons d'un peu plus près ce qu'il se passe au voisinage de  $(0, 0)$ . Si nous nous plaçons sur l'axe  $Ox$ ,  $y = 0$  et  $g(x, 0) = 0$ . Dans cette direction, la fonction est nulle. Donc si  $g$  admet une limite en  $(0, 0)$  c'est nécessairement 0.

Le résultat est le même le long de l'axe  $Oy$ . Regardons maintenant la droite d'équation  $y = x$  :  $g(x, x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ . Dans cette direction, la fonction est constante égale à  $\frac{1}{2}$ . Si  $g$  admet une limite en  $(0, 0)$  c'est nécessairement  $\frac{1}{2}$ .

Nous avons ainsi trouvé deux chemins passant par  $(0, 0)$  pour lesquels la fonction converge en  $(0, 0)$  vers des valeurs différentes. Nous en déduisons que  $g$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ . En reprenant les termes du théorème, nous pouvons définir deux suites, par exemple  $(\frac{1}{n}, 0)$  et  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , qui convergent toutes les deux vers  $(0, 0)$  mais  $g(\frac{1}{n}, 0)$  et  $g(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  ne convergent pas vers la même limite dans  $\mathbf{R}$ .

- Trouver le « bon chemin » permettant de montrer que la fonction ne converge pas n'est pas toujours évident. Soit  $h(x, y) = x \ln(y)$ . Elle est définie sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ . Étudions la convergence de  $h$  en  $(0, 0)$ . Le long de la droite d'équation  $x = 0$ , la fonction est nulle et converge donc vers 0 en  $(0, 0)$ .

Considérons maintenant la demi-droite d'équation  $y = ax, x > 0$  avec  $a > 0$ . Évaluons  $h$  sur cette droite :  $h(x, ax) = x \ln(ax) = x \ln(a) + x \ln(x)$ . Lorsque  $x$  tend vers 0,  $h(x, ax) \rightarrow 0$ , donc le long de cette droite  $h$  converge à nouveau vers 0 en  $(0, 0)$ .

Regardons maintenant la courbe d'équation  $y = e^{\frac{1}{x}}, x > 0$ . Lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ ,  $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ , donc cette courbe se rapproche du point  $(0, 0)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

Évaluons  $h$  sur cette courbe :  $h(x, e^{\frac{1}{x}}) = x \ln(e^{\frac{1}{x}}) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ . Donc le long de cette courbe, la fonction est constante égale à 1 et ne peut donc pas converger vers 0 en  $(0, 0)$ .

La fonction  $h$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ .

## 1.3 Continuité

Le concept de limite étant défini, celui de continuité se définit comme sur  $\mathbf{R}$ .

### Définition.

Soit  $f$  une fonction de plusieurs variables définie sur un voisinage de  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ . La fonction  $f$  est continue en  $\mathbf{x}_0$  si :  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ .  
La fonction  $f$  est continue sur une partie  $A$  de  $\mathbf{R}^n$  si elle est continue en tout point de  $A$ .

Regardons deux exemples fondamentaux :

### Exemples

Soit  $p_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $p_1(x, y) = x$ . Il s'agit simplement de l'application qui à tout élément de  $\mathbf{R}^2$  associe son abscisse. Alors pour tout  $(x_0, y_0)$ ,

$$|p_1(x, y) - p_1(x_0, y_0)| = |x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

On en déduit que  $|p_1(x, y) - p_1(x_0, y_0)|$  converge vers 0 lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(x_0, y_0)$ . Donc  $p_1$  est continue en  $(x_0, y_0)$ . La fonction  $p_1$  est donc continue sur  $\mathbf{R}^2$ .

Il en est évidemment de même pour la fonction  $p_2(x, y) = y$ , et ces exemples s'étendent sans difficulté en dimension supérieure.

### Théorème (s généraux).

Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions continues sont encore des fonctions continues.

En combinant ce théorème avec l'exemple précédent, nous déduisons immédiatement que de nombreuses fonctions sont continues. Par exemple :  $f(x, y) = xe^{x+y^2}$  peut s'écrire  $f(x, y) = p_1(x) \times \exp(p_1(x) + p_2(y)^2)$ . nous avons vu que les fonctions  $p_1$  et  $p_2$  sont continues sur  $\mathbf{R}^2$ . On les compose ici avec les fonctions  $X \mapsto X^2$  et  $\exp$  dont nous savons qu'elles sont continues sur  $\mathbf{R}$  et on utilise également une somme et un produit. Nous concluons grâce aux théorèmes généraux que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}^2$ .

Résumons cela ainsi :

### Corollaire.

Soit  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$  une fonction définie par une formule exprimée à l'aide des variables  $x_k$ , des fonctions usuelles et des opérations élémentaires.

Alors  $f$  est continue sur son ensemble de définition.

Conclusion : les difficultés apparaissent là où les fonctions ne sont pas définies par une formule.

### Exemples

- Reprenons la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$  pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et définissons de plus  $f(0, 0) = 0$ .  
D'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  puisqu'elle y est définie par une formule. En  $(0, 0)$ , la continuité mérite une étude. Nous l'avons déjà faite et avons montré que  $f(x, y) \rightarrow 0 = f(0, 0)$  lorsque  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Donc  $f$  est également continue en  $(0, 0)$  et  $f$  est finalement continue sur  $\mathbf{R}^2$ .
- Soit  $g$  définie par  $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  pour  $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et définissons de plus  $g(0, 0) = 0$ . Là encore  $g$  est continue sur  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  d'après les théorèmes généraux. En revanche, nous avons démontré que  $g$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ , elle n'est donc pas continue en  $(0, 0)$ .

## 2 Dérivées partielles et différentiabilité

### Définition.

Soit  $f$  une application en  $n$  variables définie au voisinage de  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , et soit  $k \leq n$ .

Nous définissons l'application d'une variable  $g_k$  définie par  $g_k(t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$ .

Si  $g_k$  est dérivable en  $t = x_k$ , la dérivée partielle  $k$ -ème de  $f$  en  $\mathbf{x}$  est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = g'_k(x_k).$$

Étudier la fonction  $g_k$  revient à étudier le comportement de  $f$  lorsque toutes les variables sont fixées sauf la  $k$ -ème. Cela revient à l'étudier dans une direction précise de  $\mathbf{R}^n$ . La dérivée partielle  $k$ -ème représente ainsi la variation infinitésimale de  $f$  au voisinage de  $\mathbf{x}$  dans cette direction.

### Exemples

Soit  $f$  définie par  $f(x, y) = x^2 + xy$  et soit  $\mathbf{x} = (2, -5)$ . Pour ce point, les applications  $g_1$  et  $g_2$  de la définition sont définies par :  $g_1(t) = t^2 - 5t$  et  $g_2(t) = 4 + 2t$ . Ces fonctions sont dérivables et nous déduisons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -5) = g'_1(2) = -1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, -5) = g'_2(-5) = 2$$

Dans la direction horizontale, la fonction  $f$  est décroissante au voisinage de  $(2, -5)$  et dans la direction verticale, elle est croissante.

De manière générale, les applications  $g_1$  et  $g_2$  sont définies pour un point  $(x, y)$  de  $\mathbf{R}^2$  par  $g_1(t) = t^2 + ty$  et  $g_2(t) = x^2 + xt$ . Ces deux applications sont dérivables respectivement en  $x$  et en  $y$  et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'_1(x) = 2x + y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g'_2(y) = x$$

Insistons, dans cet exemple, nous n'avons étudié le comportement de  $f$  que dans deux directions particulières du plan. Est-ce que cela suffit à décrire le comportement de  $f$  au voisinage d'un point ? La réponse est oui dans de nombreux cas, mais cela n'est pas général !

#### Propriété.

Soit  $f$  une fonction en deux variables admettant des dérivées partielles au voisinage de  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ . Si les deux fonctions dérivées partielles sont **continues en  $\mathbf{x}_0$** , alors au voisinage de  $\mathbf{x}_0$  :

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + o_{\mathbf{x}_0}(\|(x, y)\|)$$

Cette propriété signifie que  $f$  peut être approchée au voisinage de  $(x_0, y_0)$  par l'application affine :  $(x, y) \mapsto f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)(y - y_0)$ . On dit que  $f$  est **différentiable** au voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

La condition n'est pas nécessaire : la fonction  $f$  pourrait être différentiable, c'est-à-dire qu'elle admet un développement limité d'ordre 1, sans nécessairement admettre des dérivées partielles au voisinage du point considéré.

## 3 Dérivées partielles secondes

Si la fonction  $f$  admet des dérivées partielles sur un domaine de  $\mathbf{R}^n$ , ses dérivées  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sont des fonctions que nous pourrions à nouveau dériver. Nous définissons ainsi les dérivées partielles secondes de  $f$ .

#### Définition.

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}^n$  admettant une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  au voisinage de  $\mathbf{x}$ . Si cette fonction admet elle-même une dérivée partielle par rapport à  $x_j$  en  $\mathbf{x}$ , nous notons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

et nous l'appelons dérivée seconde de  $f$  en  $\mathbf{x}$  par rapport aux variables  $x_i$  et  $x_j$ .

Cette notation est discutable car ambiguë : il n'est pas clair qu'on dérive d'abord  $f$  par rapport à  $x_i$ , puis le résultat par rapport à  $x_j$ . La raison est que le plus souvent, l'ordre des dérivations n'a pas d'importance :

**Théorème.**

de Schwarz

Soit  $f$  une fonction admettant des dérivées partielles seconde au voisinage de  $\mathbf{x}$ . Si les fonctions  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  sont continues en  $\mathbf{x}$ , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$$

Notons bien qu'il y a une hypothèse ! Il existe des fonctions pour lesquelles la conclusion est fausse.