Devoir 3

Laplace

$$L(1)(p) = \frac{1}{p} \qquad L(\cos(\omega t))(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0)$$

$$L(\mathrm{e}^{-at})(p) = \frac{1}{p+a} \qquad L(\sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad L(\textstyle\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau)(p) = \frac{L(f)(p)}{p}$$

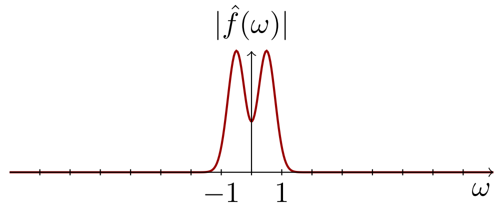
Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \qquad \widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}, \qquad \widehat{(f')}(\omega) = \mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega), \qquad \widehat{tf(t)}(\omega) = \mathrm{i}(\hat{f})'(\omega)$$

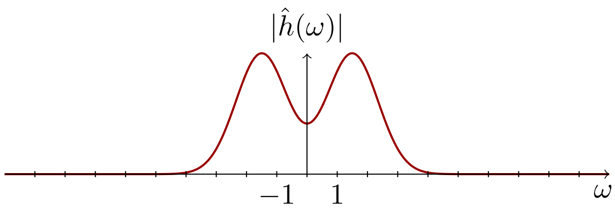
Exercice 1 : attribution d'une bande de fréquences (5 points)

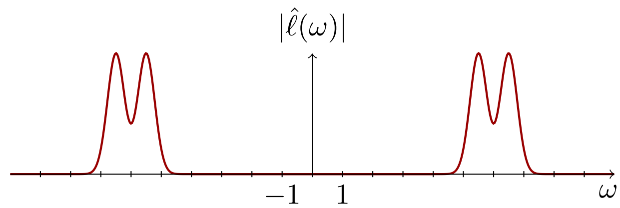
On considère une fonction f, dont le spectre (en module) est donné ci-contre.

Rappels : $g(t) = f(t+a) \implies \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}$;
$g(t) = f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} \implies \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - b)$;
$g(t) = f(ct) \implies \hat{g}(\omega) = \frac{1}{|c|}\hat{f}(\frac{\omega}{c})$.



1. On pose $g(t) = \cos(6t)f(t)$. Déterminer, à l'aide d'une formule de décalage, la transformée $\hat{g}(\omega)$ et représenter le graphe de $|\hat{g}(\omega)|$.
2. On considère maintenant la fonction h dont le spectre est donné ci-dessous. On souhaite la transformer en une fonction ℓ de spectre donné à côté (nous souhaitons ainsi modifier la bande de fréquences composant le signal h).
   Toujours à l'aide de propriétés, exprimer la fonction $\ell(t)$ en fonction de $h(t)$ de manière à obtenir le spectre $|\hat{\ell}|$ voulu.





3. Un récepteur reçoit le signal $\ell(t)$. Quelle opération sur ℓ doit-il effectuer pour retrouver le signal $h(t)$ initial ?

Exercice 2 : transformée de Fourier de la gaussienne

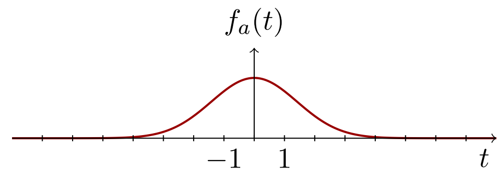
On considère une fonction de Gauss définie par $f_a(t) = \mathrm{e}^{-at^2}$ avec $a > 0$. Le but de cet exercice est de déterminer sa transformée de Fourier et d'en déduire certaines propriétés.

On admet la valeur de cette intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

1. Vérifier que f_a est solution de l'équation différentielle : $y'(t) + 2aty(t) = 0$.
2. Passer à la transformée de Fourier dans cette équation, et déduire que $\hat{y}$ est également solution d'une équation différentielle analogue à celle ci-dessus.

   La résolution de cette équation conduit à la solution : $\hat{f}_a(\omega) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Autrement dit, la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne !
3. Calculer directement $\hat{f}_a(0)$ et en déduire la valeur de λ.
4. Pour quelle valeur de a les fonctions $\hat{f}_a$ et f_a sont-elles proportionnelles ?
   Notamment pour cette raison, cette fonction gaussienne joue un rôle important en sciences.
5. On donne le graphe de f_a pour cette valeur (et c'est donc aussi, à une constante multiplicative près, le graphe de $\hat{f}_a$).

   Représenter l'allure des graphes de f_a et $\hat{f}_a$ pour une valeur de a plus élevée. Quelle propriété de la transformée de Fourier retrouve-t-on ?

6. Soient $a > 0$ et $b > 0$. En passant par la transformée, montrer que le produit de convolution $f_a * f_b$ est encore une fonction gaussienne.

Exercice 3 : circuit RL **(5 points)**

On considère un circuit constitué d'une résistance et d'une bobine en série. On l'alimente avec une force électromotrice $e(t)$. La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine satisfait l'équation intégrale

$$u(t) + \frac{R}{L}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau = e(t), \qquad \text{où } \int u(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ désigne une primitive de } u.$$

Nous noterons $U(p)$ et $E(p)$ les transformées de Laplace de $u(t)$ et $e(t)$.

1. Passer à la transformée de Laplace dans l'équation intégrale et montrer que : $U(p) = E(p) \times \frac{pL}{pL+R}$.
2. Notons $H(p) = \frac{pL}{pL+R}$. Représenter le graphe de la fonction $\omega \mapsto |H(\mathrm{i}\omega)|$.
   Comment se comporte le circuit ? Quelles fréquences de e sont les mieux transmise à la tension $u(t)$?

   Un premier exemple : posons $e(t) = 1$ la fonction échelon définie à partir de $t = 0$.
3. Déterminer l'expression de $U(p)$ correspondante et en déduire celle de $u(t)$.
4. Comment se comporte cette fonction au cours du temps ? Est-ce cohérent avec ce qui a été démontré précédemment ?

   Considérons maintenant un régime sinusoïdal en posant $e(t) = \sin(\omega t)$, et pour simplifier un peu les calculs, nous poserons $R = L = 1$.
5. Donner l'expression de $U(p)$ correspondante et la décomposer en éléments simples sous la forme
$$U(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+\omega^2}.$$
6. En déduire l'expression de la solution $u(t)$ correspondante.
7. Comment se comporte cette solution lorsque ω est très proche de 0 ou très élevé ?