DEVOIR 3

Formulaire :
Solutions d'une équation différentielle de la forme $a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0$: $y(t)=\lambda\exp(-\int \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{d}t)$.

Laplace

$$L(u(t))(p)=\frac{1}{p}$$
$$L(t)(p)=\frac{1}{p^2}$$
$$L(t^2)(p)=\frac{2}{p^3}$$
$$L(\cos(\omega t))(p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$
$$L(\sin(\omega t))(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$
$$L(f')(p)=pL(f)(p)-f(0)$$
$$L(tf(t))(p)=-(L(f))'(p)$$
$$L(f*g)=L(f)\times L(g)$$

Fourier

$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$ $\qquad$ $\widehat{f'}(\omega)=\mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega)$ $\qquad$ $\widehat{f*g}=\hat{f}\times\hat{g}$

Exercice 1 : une transformée de Laplace

Le but de cet exercice est de déterminer la transformée de Laplace de la fonction définie par $f(t)=\sqrt{t}$ pour $t\geqslant 0$. Nous noterons $F(p)$ cette transformée.

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle : (E) : $\quad 2tf'(t)-f(t)=0$.
2. Montrer : $L(tf'(t))(p)=-pF'(p)-F(p)$.
3. Passer à la transformée de Laplace dans l'équation (E) et montrer que F est également solution d'une équation différentielle.
4. La résoudre et déduire que F est de la forme $F(p)=\dfrac{\lambda}{p^{3/2}}$.

   Il reste à déterminer la valeur de λ. Nous allons utiliser pour cela la fonction
   $$(f*f)(x)=\int_0^x f(t)f(x-t)\mathrm{d}t.$$
5. Montrer que $L(f*f)=\frac{\lambda^2}{2}L(x^2)$. En déduire l'expression de $(f*f)(x)$.
6. On admet que $\int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{8}$. En déduire la valeur de λ et conclure.

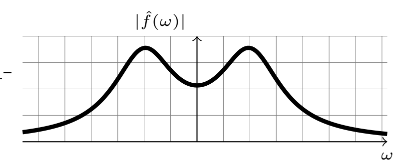
Exercice 2 : transformée de Fourier et circuit RC

On considère un circuit RC. La tension aux bornes du condensateur satisfait l'équation différentielle

$$(E): \quad RCy'(t) + y(t) = f(t).$$

Notre objectif est de décrire le comportement de ses solutions y en fonction de la tension f en entrée du circuit.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E). Comment se comportent ses solutions lorsque t tend vers $+\infty$?
2. On cherche maintenant une solution particulière $y_p(t)$ qui admet une transformée de Fourier. Passer à la transformée de Fourier dans l'équation et montrer que $\hat{y}_p$ est de la forme $\hat{y}_p(\omega) = \alpha(\omega)\hat{f}(\omega)$.
3. Quelles fréquences de f sont les plus fidèlement transmises à la solution y_p ? Comment se comporte le circuit ?



4. Un exemple : supposons que le spectre de f ait l'allure ci-contre. Représenter le spectre de y_p correspondant.

   Nous allons maintenant chercher l'expression de $y_p(t)$.
5. Soit $a > 0$ et $g(t) = \mathrm{e}^{-at}$ pour $t > 0$ et $g(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$. Calculer la transformée de Fourier de g.
6. Déterminer a et b tels que $b\hat{g}(\omega) = \alpha(\omega)$. En déduire l'expression de $y_p(t)$ sous forme d'un produit de convolution.

Exercice 3 : filtre

On considère un filtre linéaire de réponse impulsionnelle h. Pour un signal d'entrée $e(t)$, il renvoie le signal de sortie $s(t) = (e * h)(t)$.

Pour caractériser le filtre, on l'a testé avec un échelon en entrée : $e(t) = u(t)$. On a obtenu en sortie le signal $s(t) = \sin(t)$.

1. À l'aide de la transformée de Laplace, déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ correspondante.
2. Représenter le graphe de la fonction de transfert $H(p) = L(h)(p)$ du filtre. Comment se comporte ce filtre ?
3. On donne en entrée le signal $e_\omega(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega \neq \pm 1$. Déterminer le signal de sortie $s_\omega(t)$ correspondant.

   Indication : on décomposera une fraction rationnelle sous la forme $\dfrac{ap+b}{p^2+1} + \dfrac{cp+d}{p^2+\omega^2}$.
4. Que vaut $s_\omega(t)$ quand ω est très élevé ? Et quand ω est proche de 1 ? Retrouver le résultat obtenu à la question 2.