Devoir 3

Formulaire :
Solutions d'une équation différentielle de la forme $a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0$: $y(t)=\lambda\exp(-\int\frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{d}t)$.

Laplace

$L(u(t))(p)=\dfrac{1}{p}$

$L(t)(p)=\dfrac{1}{p^2}$

$L(t^2)(p)=\dfrac{2}{p^3}$

$L(\cos(\omega t))(p)=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$L(\sin(\omega t))(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$L(f')(p)=pL(f)(p)-f(0)$

$L(tf(t))(p)=-(L(f))'(p)$

$L(f*g)=L(f)\times L(g)$

Fourier

$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$

$\widehat{f'}(\omega)=\mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega)$

$\widehat{f*g}=\hat{f}\times\hat{g}$

Exercice 1 : une transformée de Laplace

Le but de cet exercice est de déterminer la transformée de Laplace de la fonction définie par $f(t)=\sqrt{t}$ pour $t\geqslant 0$. Nous noterons $F(p)$ cette transformée.

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle : (E) : $2tf'(t)-f(t)=0$.

   La dérivée de f est : $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Donc $2tf'(t)-f(t)=\frac{2t}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}=0$.

2. Montrer : $L(tf'(t))(p)=-pF'(p)-F(p)$.

   Utilisons les propriétés de Laplace : $L(tg(t))(p)=-L(g)'(p)$, donc $L(tf'(t))(p)=-L(f')'(p)$. Or $L(f')(p)=pL(f)(p)-f(0)$, donc

   $$L(tf'(t))(p)=-(pL(f)(p)-f(0))'=-pL(f)'(p)-L(f)(p)=-pF'(p)-F(p).$$

3. Passer à la transformée de Laplace dans l'équation (E) et montrer que F est également solution d'une équation différentielle.

   Passons à la transformée de Laplace dans cette équation : $L(2tf'(t))-L(f)=0$, donc $-2pF'(p)-2F(p)-F(p)=0$ et finalement

   $$-2pF'(p)-3F(p)=0.$$

4. La résoudre et déduire que F est de la forme $F(p)=\dfrac{\lambda}{p^{3/2}}$.

C'est une équation linéaire d'ordre 1. Ses solutions sont de la forme

$$F(p) = \lambda e^{-\int \frac{3}{2p} \mathrm{d}p} = \lambda e^{-\frac{3}{2}\ln(p)} = \frac{\lambda}{p^{3/2}}.$$

Il reste à déterminer la valeur de λ. Nous allons utiliser pour cela la fonction

$$(f * f)(x) = \int_0^x f(t)f(x-t)\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que $L(f*f) = \frac{\lambda^2}{2} L(x^2)$. En déduire l'expression de $(f*f)(x)$.

   Appliquons la propriété du produit de convolution :

$$L(f*f) = L(f) \times L(f) = \left(\frac{\lambda}{p^{3/2}}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{p^3} = \frac{\lambda^2}{2} L(x^2)(p).$$

   Par unicité de la transformée de Laplace, on conclut que $f * f(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2}$.

6. On admet que $\int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{8}$. En déduire la valeur de λ et conclure.

   Précisons tout d'abord que cette intégrale n'est pas très difficile à obtenir. Le graphe de $t \mapsto \sqrt{t}\sqrt{1-t} = \sqrt{1/4 - (t-1/2)^2}$ est le demi-cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $\frac{1}{2}$. l'aire sous cette courbe est donc bien égale à $\frac{\pi}{8}$.

   Ensuite, cette intégrale est égale à $(f*f)(1)$. Donc

$$(f*f)(1) = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

   On en déduit que $\lambda^2 = \frac{\pi}{4}$. Il est facile de vérifier que la transformée de Laplace de f est positive (c'est l'intégrale d'une fonction positive), donc $\lambda > 0$ et finalement $\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Conclusion : la transformée de Laplace de f est donnée par

$$F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}.$$

Exercice 2 : transformée de Fourier et circuit RC

On considère un circuit RC. La tension aux bornes du condensateur satisfait l'équation différentielle

$$(E): \quad RCy'(t) + y(t) = f(t).$$

Notre objectif est de décrire le comportement de ses solutions y en fonction de la tension f en entrée du circuit.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E). Comment se comportent ses solutions lorsque t tend vers $+\infty$?

   L'équation homogène associée est : $RCy'(t) + y(t)$. Ses solutions sont de la forme : $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{RC}} = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.
   Ces fonctions convergent vers 0 quand t tendent vers $+\infty$.

2. On cherche maintenant une solution particulière $y_p(t)$ qui admet une transformée de Fourier. Passer à la transformée de Fourier dans l'équation et montrer que $\hat{y}_p$ est de la forme $\hat{y}_p(\omega) = \alpha(\omega)\hat{f}(\omega)$.

   Passons à la transformée de Fourier :

   $$RC\hat{y_p'} + \hat{y}_p = \hat{f} \quad \text{donc} \quad RC\mathrm{i}\omega\hat{y}_p(\omega) + \hat{y}_p(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

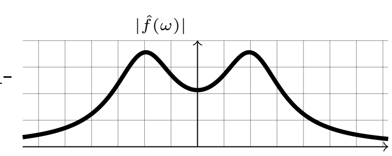
   On en déduit que

   $$\hat{y}_p(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega RC + 1}\hat{f}(\omega).$$

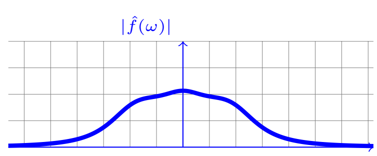
3. Quelles fréquences de f sont les plus fidèlement transmises à la solution y_p ? Comment se comporte le circuit ?

   La transformée de f est atténuée par le facteur $\alpha(\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega RC+1}$. L'atténuation est d'autant plus forte que ω est élevé. Lorsque $\omega \approx 0$, $\hat{y}_p(\omega) = \hat{f}(\omega)$: les basses fréquences présentes dans f sont fidèlement transmises à la solution $\hat{y}_p$. Lorsque $\omega \to \infty$, $\hat{y}_p(\omega) \to 0$: les hautes fréquences présentes dans f sont quasiment supprimées par le circuit.
   Le circuit se comporte comme un filtre passe-bas.

4. Un exemple : supposons que le spectre de f ait l'allure ci-contre. Représenter le spectre de y_p correspondant.

   Il faut simplement multiplier ce spectre par la fonction $|\alpha(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$.

   Nous allons maintenant chercher l'expression de $y_p(t)$.

5. Soit $a > 0$ et $g(t) = \mathrm{e}^{-at}$ pour $t > 0$ et $g(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$. Calculer la transformée de Fourier de g.

Calculons :

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\omega)t}}{-a-\mathrm{i}\omega}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}\end{aligned}$$

6. Déterminer a et b tels que $b\hat{g}(\omega) = \alpha(\omega)$. En déduire l'expression de $y_p(t)$ sous forme d'un produit de convolution.

   Avec $a = b = \frac{1}{RC}$, on obtient $b\hat{g}(\omega) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC}+\mathrm{i}\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{i}RC\omega} = \alpha(\omega)$. Ainsi $\hat{y}_p(\omega) = \frac{1}{RC}\hat{g}(\omega) \times \hat{f}(\omega) = \widehat{\frac{1}{RC}g * f}$. On en déduit que

$$y_p(t) = \frac{1}{RC}(g * f)(t) = \frac{1}{RC}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{RC}} f(t-x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 : filtre

On considère un filtre linéaire de réponse impulsionnelle h. Pour un signal d'entrée $e(t)$, il renvoie le signal de sortie $s(t) = (e * h)(t)$.

Pour caractériser le filtre, on l'a testé avec un échelon en entrée : $e(t) = u(t)$. On a obtenu en sortie le signal $s(t) = \sin(t)$.

1. À l'aide de la transformée de Laplace, déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ correspondante.

   Notons E, H et S les transformées de Laplace de e, h et s. Alors $EH = S$, donc, d'après les tables,

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1/(p^2+1)}{1/p} = \frac{p}{p^2+1}.$$

   On reconnaît la transformée de cos, donc $h(t) = \cos(t)$.

2. Représenter le graphe de la fonction de transfert $H(p) = L(h)(p)$ du filtre. Comment se comporte ce filtre ?

   La fonction de transfert $H(p)$ est nulle en 0 et en $+\infty$. Elle est maximale en $p = 1$. Si on passe au domaine fréquentiel, on observe même que $H(\mathrm{i}\omega)$ tend vers l'infini lorsque ω tend vers 1. Ainsi, les fréquences proches de 1 seront amplifiées par le filtre, celles loin de 1 seront atténuées. Le filtre se comporte comme un passe-bande autour de la fréquence 1.

3. On donne en entrée le signal $e_\omega(t) = \sin(\omega t)$ avec $\omega \neq \pm 1$. Déterminer le signal de sortie $s_\omega(t)$ correspondant.

   Indication : on décomposera une fraction rationnelle sous la forme $\dfrac{ap+b}{p^2+1} + \dfrac{cp+d}{p^2+\omega^2}$.

Passons à la transformée :

$$S_\omega(p) = E_\omega(p)H(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{\omega p}{(p^2+\omega^2)(p^2+1)}.$$

Décomposons cette fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{\omega p}{(p^2+\omega^2)(p^2+1)} = \frac{ap+b}{p^2+1}+\frac{cp+d}{p^2+\omega^2} = \frac{(a+c)p^3+(b+d)p^2+(a\omega^2+c)p+(b\omega^2+d)}{(p^2+\omega^2)(p^2+1)}.$$

Donc $a+c=0$, $b+d=0$, $\omega^2 a+c=\omega$ et $\omega^2 b+d=0$. Comme $\omega^2\neq 1$, on obtient $b=d=0$, $a=\frac{\omega}{\omega^2-1}$ et $c=-\frac{\omega}{\omega^2-1}$. Donc

$$S_\omega(p) = \frac{\omega}{\omega^2-1}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{\omega}{\omega^2-1}\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2} \quad\text{donc}\quad s_\omega(t)=\frac{\omega}{\omega^2-1}\cos(t)-\frac{\omega}{\omega^2-1}\cos(\omega t).$$

4. Que vaut $s_\omega(t)$ quand ω est très élevé ? Et quand ω est proche de 1 ? Retrouver le résultat obtenu à la question 2.

   Quand ω est très élevé, les fractions sont proches de 0, et donc $s_\omega(t)$ également. Quand ω est proche de 1, les fractions sont très élevées et $s_\omega(t)$ le sera également (sauf pour $t=0$). Autrement dit, la sortie du filtre est importante lorsque la fréquence du signal en entrée est proche de 1, elle est faible lorsqu'elle est loin de 1. Le filtre se comporte bien comme un filtre passe-bande autoru de 1.