Devoir 3

Exercice 1 : équation différentielle

On considère une fonction f intégrable sur $\mathbf{R}$. Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle ci-dessous et d'en décrire les solutions en fonction de f.

$$y'(t) + y(t) = f(t) \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par $g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   On cherche maintenant une solution particulière de (E) possédant une transformée de Fourier. Notons-la $y_p(t)$.
3. Exprimer $\hat{y}_p(\omega)$ en fonction de $\hat{f}$ et de ω.
4. Comment est le spectre de y_p en fonction du spectre de f ? Quelles fréquences composant f sont les mieux transmises à la solution y_p ?
5. Déduire des questions 2 et 3 l'expression de $y_p(t)$ sous forme d'un produit de convolution.
6. Donner la solution générale de (E). Comment évolue-t-elle lorsque t tend vers $+\infty$?
7. On prend comme fonction f l'impulsion de Dirac $f(t) = \delta_0(t)$. Déterminer alors la solution de (E) qui est nulle pour $t < 0$.

Exercice 2 : filtre et fonction de transfert

On considère un filtre défini par une certaine réponse impulsionnelle $h(t)$. Lorsqu'on fait passer en entrée un signal $e(t)$, on obtient en sortie du filtre le signal $s(t) = e * h(t)$.

On note u la fonction échelon. Afin de caractériser l'action du filtre, on a testé en entrée le signal $e(t) = u(t) - u(t-1)$. On a alors observé en sortie le signal $s(t) = tu(t) - (t-2)u(t-2)$.

1. Représenter les graphes des fonctions e et s.
2. Déterminer les transformées de Laplace $E(p)$ et $S(p)$ de e et s.
3. En déduire que la fonction de transfert $H(p) = L(h)(p)$ du filtre est donnée par

   $$H(p) = \frac{1}{p}(1 + \mathrm{e}^{-p}).$$

   Indication : $\mathrm{e}^{-2p} = (\mathrm{e}^{-p})^2$.
4. Représenter le graphe de $H(p)$. Comment agit ce filtre sur les fréquences des signaux introduits en entrée ?
5. Soit $\omega > 0$. Déterminer les nombres a et b tels que $\dfrac{1}{p(p^2+\omega^2)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p^2+\omega^2}$.
6. On donne en entrée le signal $e(t) = \sin(\omega t)$. Déterminer le signal de sortie $s(t)$ correspondant.
7. Que peut-on dire du signal s lorsque ω est très grand ? Est-ce cohérent avec la réponse à la question 5 ?