Corrigé du devoir 3

Exercice 1 : équation différentielle

On considère une fonction f intégrable sur $\mathbf{R}$. Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle ci-dessous et d'en décrire les solutions en fonction de f.

$$y'(t) + y(t) = f(t) \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

   L'équation homogène associée à (E) est $y' + y = 0$. Ses solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie par $g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   On calcule
   $$\hat{g}(\omega) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = [-\tfrac{\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\omega)t}}{1+\mathrm{i}\omega}]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}.$$

   On cherche maintenant une solution particulière de (E) possédant une transformée de Fourier. Notons-la $y_p(t)$.

3. Exprimer $\hat{y}_p(\omega)$ en fonction de $\hat{f}$ et de ω.

   On passe à la transformée de Fourier dans l'équation (E) : $\widehat{y_p'} + \hat{y}_p = \hat{f}$. Donc $\mathrm{i}\omega\hat{y}_p(\omega) + \hat{y}_p(\omega) = \hat{f}(\omega)$. Finalement $\hat{y}_p(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega}{\mathrm{i}\omega+1}$.

4. Comment est le spectre de y_p en fonction du spectre de f ? Quelles fréquences composant f sont les mieux transmises à la solution y_p ?

   D'après le dernier résultat, le spectre de y_p est obtenu en divisant celui de f par la fonction $\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}$. En particulier, pour des valeurs faibles de ω, $\hat{y}_p(\omega) \approx \hat{f}(\omega)$ et pour des valeurs élevées de ω, la valeur $\hat{y}_p(\omega)$ est obtenue en atténuant fortement $\hat{f}(\omega)$. Autrement dit, les basses fréquences qui composent le signal f sont très bien transmises à la solution y_p. En revanche, les hautes fréquences composant f sont très fortement atténuées et sont donc peu transmises à y_p. Le système étudié se comporte comme un filtre passe-bas.

5. Déduire des questions 2 et 3 l'expression de $y_p(t)$ sous forme d'un produit de convolution.

   On reconnaît dans la question 3 le résultat de la question 2 : $\hat{y}_p(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$. Ainsi, d'après les propriétés de la TF, $\hat{y}_p(\omega) = \widehat{f * g}(\omega)$. Donc $y_p(t) = f * g(t)$.

6. Donner la solution générale de (E). Comment évolue-t-elle lorsque t tend vers $+\infty$?

   D'après les questions 1 et 5, la solution générale de (E) est de la forme
   $$y(t) = \lambda e^{-t} + y_p(t) = \lambda e^{-t} + f * g(t),$$
   avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
   Lorsque t tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers 0. Nous sommes donc tentés de dire que $y(t) \approx f * g(t)$ lorsque t est élevé. Autrement dit, la solution tend à se comporter comme notre solution particulière (indépendamment de la condition initiale). Cela étant dit, on peut étudier le comportement de $f * g(t)$ en $+\infty$. La fonction g tend elle-même vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. On ne peut pas en déduire que $f * g$ fait de même, cela peut dépendre de la fonction f. Mais si, par exemple, la fonction f est à support borné (elle est nulle en dehors d'un intervalle borné), alors on aura bien $f * g(t) \to 0$ quand $t\ to0$. Dans ce cas, on peut simplement conclure $y(t) \to 0$.

7. On prend comme fonction f l'impulsion de Dirac $f(t) = \delta_0(t)$. Déterminer alors la solution de (E) qui est nulle pour $t < 0$.

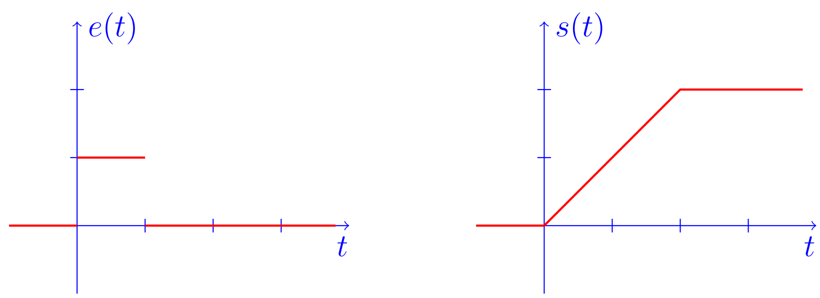
   Avec $f = \delta_0$, $f * g = g$. Donc $y(t) = \lambda e^{-t} + g(t)$. La fonction g est nulle sur $\mathbf{R}_-$. Si on souhaite que y le soit aussi, il faut que $\lambda = 0$. Notre solution est donc $y(t) = g(t) = e^{-t}u(t)$ où u désigne l'échelon.

Exercice 2 : filtre et fonction de transfert

On considère un filtre défini par une certaine réponse impulsionnelle $h(t)$. Lorsqu'on fait passer en entrée un signal $e(t)$, on obtient en sortie du filtre le signal $s(t) = e * h(t)$.

On note u la fonction échelon. Afin de caractériser l'action du filtre, on a testé en entrée le signal $e(t) = u(t) - u(t-1)$. On a alors observé en sortie le signal $s(t) = tu(t) - (t-2)u(t-2)$.

1. Représenter les graphes des fonctions e et s.



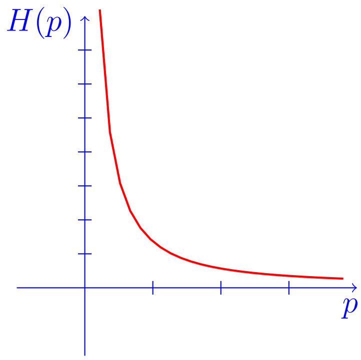
2. Déterminer les transformées de Laplace $E(p)$ et $S(p)$ de e et s.

   On utilise la linéarité et la propriété de décalage de la transformée de Laplace :
   $$E(p) = L(u)(p) - L(u(t-1))(p) = \frac{1}{p} - e^{-p}L(u)(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$
   On fait de même en remarquant que la fonction $t \mapsto (t-2)u(t-2)$ est un décalage de deux unités de la fonction $t \mapsto tu(t)$:
   $$S(p) = L(t) - e^{-2p}L(t) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

3. En déduire que la fonction de transfert $H(p) = L(h)(p)$ du filtre est donnée par
$$H(p) = \frac{1}{p}(1 + \mathrm{e}^{-p}).$$
Indication : $\mathrm{e}^{-2p} = (\mathrm{e}^{-p})^2$.
Comme $s = e * h$, $S = E \times H$, donc $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$. Après simplification :
$$H(p) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2p}}{p(1 - \mathrm{e}^{-p})} = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-p})(1 + \mathrm{e}^{-p})}{p(1 - \mathrm{e}^{-p})} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-p}}{p}.$$

4. Représenter le graphe de $H(p)$. Comment agit ce filtre sur les fréquences des signaux introduits en entrée ?

La fonction $p \mapsto H(p)$ tend vers $+\infty$ en 0 et vers 0 en $+\infty$.



Pour raisonner sur les fréquences de e et s, il faudrait utiliser la transformée de Fourier : comme $s = e * h$, $\hat{s} = \hat{e}\hat{h}$; le spectre de e est multiplié par celui de h. Avec la transformée de Laplace, il suffit de prendre $p = \mathrm{i}\omega$. On peut ici raisonner en module, et s'appuyer sur le graphe de H pour répondre à la question. D'après le graphe, $H(p)$ est très élevé pour des valeurs basses de p et très faible pour des valeurs hautes de p. On en déduit que les basses fréquences de e seront amplifiées par le filtre et les hautes fréquences seront fortement atténuées. Le filtre est donc un filtre passe-bas amplificateur.

5. Soit $\omega > 0$. Déterminer les nombres a et b tels que $\dfrac{1}{p(p^2 + \omega^2)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{bp}{p^2 + \omega^2}$.

En regroupant sur le même dénominateur, on cherche a et b tels que $\dfrac{1}{p(p^2 + \omega^2)} = \dfrac{a(p^2 + \omega^2) + bp^2}{p(p^2 + \omega^2)}$.
En identifiant les numérateurs, on obtient le système $a + b = 0$, $a\omega^2 = 1$. On le résout et on trouve $a = \frac{1}{\omega^2}$ et $b = -\frac{1}{\omega^2}$.

6. On donne en entrée le signal $e(t) = \sin(\omega t)$. Déterminer le signal de sortie $s(t)$ correspondant.

Le signal en sortie est défini par sa transformée
$$S(p = E(p)H(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\frac{1 + \mathrm{e}^{-p}}{p}.$$
Or, on a vu que $\dfrac{1}{p(p^2 + \omega^2)} = \dfrac{\frac{1}{\omega^2}}{p} - \dfrac{\frac{p}{\omega^2}}{p^2 + \omega^2}$. En multipliant par $\omega(1 + \mathrm{e}^{-p})$, on obtient
$$S(p) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{p} + \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{p\mathrm{e}^{-p}}{p^2 + \omega^2}\right).$$

On passe à la transformée inverse en reconnaissant des transformées usuelles et des décalages :

$$s(t) = \frac{1}{\omega}(u(t) + u(t-1) - \cos(\omega t) - \cos(\omega(t-1))).$$

7. Que peut-on dire du signal s lorsque ω est très grand ? Est-ce cohérent avec la réponse à la question 4 ?

   Les fonctions intervenant dans la parenthèse sont des fonctions bornées. Le facteur $\frac{1}{\omega}$ nous permet de dire que $s(t)$ et d'autant plus faible que ω est élevé. Cela est cohérent avec le fait que le filtre est un passe-bas. Plus la fréquence ω imposée en entrée est élevée, plus le signal est atténué par le filtre.