Devoir 3

Exercice 1 : filtre (6 pts)

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Pour une entrée $e(t) = e^{-t}$, on a obtenu en sortie $s(t) = e * h(t) = te^{-t}$.

1. Déterminer la transformée de Laplace $H(p)$ de h.
2. On considère maintenant le signal d'entrée $e(t) = \sin(\omega t)$. Déterminer l'expression de la transformée de Laplace $S(p)$ de la sortie correspondante sous la forme :

$$S(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+\omega^2}.$$

3. En déduire l'expression de la sortie $s(t)$.
4. Quelle influence a le paramètre ω sur la sortie ? Quelle est l'action de ce filtre ?

Exercice 2 : circuit LC (8 pts)

On considère un circuit LC en régime forcé, par exemple un ressort soumis à une excitation. L'évolution de la position du système $y(t)$ est décrite par une équation différentielle de la forme

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t),$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ est la fréquence propre du système et f représente la force extérieure.

1. Exprimer $\widehat{y''}(\omega)$ en fonction de $\hat{y}(\omega)$.
2. Passer à la transformée de Fourier dans l'équation différentielle et montrer que $\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\hat{f}(\omega)$.
3. Représenter un spectre $\hat{f}$ quelconque puis représenter le spectre de y correspondant. Comment réagit le système en fonction de f et des fréquences qui le composent ?

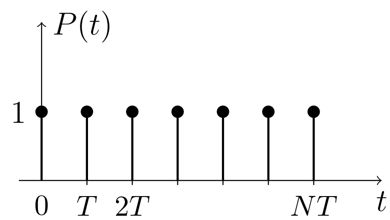
   Nous allons maintenant essayer d'exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$ à l'aide de la transformée de Laplace.
4. On rappelle qu'en posant $p = i\omega$, on obtient $L(g)(i\omega) = \hat{g}(\omega)$. Reprendre l'égalité de la question 2 et en déduire l'expression de $L(y)(p)$ en fonction de $L(f)(p)$.
5. Donner une fonction h telle que $L(h)(p) = \frac{1}{\omega_0^2+p^2}$.
6. Exprimer la solution $y(t)$ en fonction de $f(t)$ et $h(t)$.

Remarque : nous avons déterminé une solution particulière, celle qui admet une transformée de Fourier. Pour obtenir la solution générale du problème, il faut ajouter les solutions de l'équation homogène.

Exercice 3 : échantillonnage (10 pts)

On rappelle que la transformée de Fourier de la distribution de Dirac est $\hat{\delta}_0(\omega) = 1$.

1. En déduire la transformée de Fourier de la distribution de Dirac en a définie par $\delta_a(t) = \delta_0(t-a)$.
2. Soit $T > 0$. En déduire la transformée de la fonction P définie par $P(t) = \sum_{k=0}^{N} \delta_{kT}(t)$ et montrer qu'elle est égale à



$$\hat{P}(\omega) = \frac{1 - e^{-i(N+1)T\omega}}{1 - e^{-iT\omega}}.$$

   On reconnaîtra une somme géométrique.

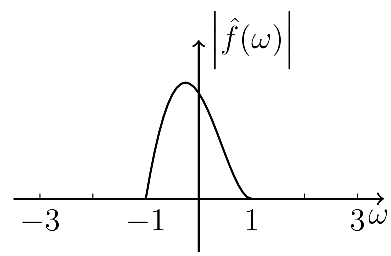
3. Factoriser par $e^{-i\frac{N+1}{2}T\omega}$ au numérateur et par $e^{-i\frac{1}{2}T\omega}$ au dénominateur et en déduire que

$$\left|\hat{P}(\omega)\right| = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}T\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}T\omega\right)}.$$

Soit f un signal que l'on a échantillonné avec un pas T. Le signal capté est alors égal à $g(t) = f(t)P(t)$

4. Exprimer la transformée de g en fonction de celles de f et P.

On peut montrer que si l'échantillonnage est infini ($N = +\infty$), on obtient $\hat{g}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - k\frac{2\pi}{T})$. On se donne le spectre de f ci-contre.



5. D'après le graphe, que peut-on dire des fréquences présentes dans le signal f ?
6. On choisit un pas $T = 2\pi$. Représenter la fonction $\hat{g}$ correspondante.
7. Faire de même avec $T = 4\pi$.
8. Expliquer pourquoi ce dernier pas d'échantillonnage est trop grand pour pouvoir espérer retrouver la fonction f initiale. Comment doit-on choisir le pas d'échantillonnage en fonction des fréquences qui composent le signal étudié ?