Corrigé du devoir 3

Exercice 1 : filtre (6 pts)

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Pour une entrée $e(t) = e^{-t}$, on a obtenu en sortie $s(t) = e * h(t) = te^{-t}$.

1. Déterminer la transformée de Laplace $H(p)$ de h.

   On a $s(t) = e * h(t)$, donc en passant à la transformée de Laplace : $S(p = E(p) \times H(p)$. On connaît $e(t) = e^{-t}$ et $s(t) = te^{-t}$, donc $E(p) = \frac{1}{p+1}$ et $S(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$. Donc $\frac{1}{p+1}H(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$. Donc
   $$H(p) = \frac{1}{p+1}.$$

2. On considère maintenant le signal d'entrée $e(t) = \sin(\omega t)$. Déterminer l'expression de la transformée de Laplace $S(p)$ de la sortie correspondante sous la forme :
   $$S(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+\omega^2}.$$

   Calculons :
   $$S(p) = E(p)H(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1}{p+1}.$$
   On décompose en éléments simples : $S(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+\omega^2}$. On regroupe les fractions et on identifie. On obtient le système $a + b = 0$, $b + c = 0$, $a\omega^2 + c = \omega$. On obtient $a = c = \frac{\omega}{\omega^2+1}$ et $b = -a$.

3. En déduire l'expression de la sortie $s(t)$.

   Comme $S(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+\omega^2}$, en passant à la transformée inverse, on obtient
   $$s(t) = ae^{-t} + b\cos(\omega t) + \tfrac{c}{\omega}\sin(\omega t).$$
   On remplace a, b et c :
   $$s(t) = \frac{\omega}{\omega^2+1}e^{-t} - \frac{\omega}{\omega^2+1}\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega^2+1}\sin(\omega t).$$

4. Quelle influence a le paramètre ω sur la sortie ? Quelle est l'action de ce filtre ?

   Quand ω est proche de 0, $s(t) \approx \sin(\omega t)$ et le signal d'entrée est ainsi quasi préservé. En revanche quand ω augmente, la sortie est de plus en plus atténuée : $s(t) \to 0$ quand $\omega \to \infty$. Il s'agit d'un filtre passe-bas : il laisse passer les signaux à basse fréquence et atténue fortement les signaux à haute fréquence.

Exercice 2 : circuit LC (8 pts)

On considère un circuit LC en régime forcé, par exemple un ressort soumis à une excitation. L'évolution de la position du système $y(t)$ est décrite par une équation différentielle de la forme

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t),$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ est la fréquence propre du système et f représente la force extérieure.

1. Exprimer $\widehat{y''}(\omega)$ en fonction de $\hat{y}(\omega)$.

   On sait que $\widehat{y'}(\omega) = i\omega\widehat{y}(\omega)$, donc $\widehat{y''}(\omega) = i\omega\widehat{y'}(\omega) = (i\omega)^2\widehat{y}(\omega) = -\omega^2\widehat{y}(\omega)$.

2. Passer à la transformée de Fourier dans l'équation différentielle et montrer que $\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\hat{f}(\omega)$.

   On passe à la transformée de Fourier dans l'équation : $\widehat{y''}(\omega) + \omega_0^2\widehat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)$. Donc $-\omega^2\widehat{y}(\omega) + \omega_0^2\widehat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)$. On obtient bien $\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\hat{f}(\omega)$.

3. Représenter un spectre $\hat{f}$ quelconque puis représenter le spectre de y correspondant. Comment réagit le système en fonction de f et des fréquences qui le composent ?

   Lorsque $\omega \approx \omega_0$, la valeur de $\widehat{y}(\omega)$ est très élevée. En revanche, lorsque ω est très éloigné de ω_0, la valeur de $\hat{f}(\omega)$ est très atténuée par le terme $\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$. Ainsi, par rapport au spectre de f, le spectre de y est amplifié près de ω_0 et atténué en dehors.

   Nous allons maintenant essayer d'exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$ à l'aide de la transformée de Laplace.

4. On rappelle qu'en posant $p = i\omega$, on obtient $L(g)(i\omega) = \hat{g}(\omega)$. Reprendre l'égalité de la question 2 et en déduire l'expression de $L(y)(p)$ en fonction de $L(f)(p)$.

   On remplace $\widehat{y}(\omega)$ par $L(y)(i\omega) = L(y)(p)$ et ω par p/i : $L(y)(p) = \frac{1}{\omega_0^2+p^2}L(f)(p)$.

5. Donner une fonction h telle que $L(h)(p) = \frac{1}{\omega_0^2+p^2}$.

   $\frac{1}{\omega_0^2+p^2} = \frac{1}{\omega_0}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+p^2}$. Il s'agit de la transformée de la fonction $h(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$.

6. Exprimer la solution $y(t)$ en fonction de $f(t)$ et $h(t)$.

   Comme $L(y) = L(h) \times L(f)$, on a $y = h * f$. Donc

$$y(t) = h * f(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 u)f(t-u)du.$$

Remarque : nous avons déterminé une solution particulière, celle qui admet une transformée de Fourier. Pour obtenir la solution générale du problème, il faut ajouter les solutions de l'équation homogène.

Exercice 3 : échantillonnage (10 pts)

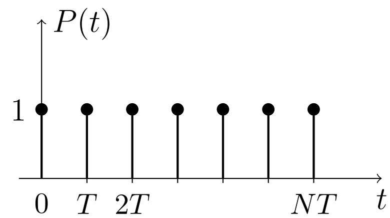
On rappelle que la transformée de Fourier de la distribution de Dirac est $\hat{\delta}_0(\omega) = 1$.

1. En déduire la transformée de Fourier de la distribution de Dirac en a définie par $\delta_a(t) = \delta_0(t-a)$.

   Comme δ_a est un décalage de δ_0 et $\hat{\delta}_0(\omega) = 1$, on obtient $\hat{\delta}_a(\omega) = e^{-ia\omega}$.

2. Soit $T > 0$. En déduire la transformée de la fonction P définie par $P(t) = \sum_{k=0}^{N} \delta_{kT}(t)$ et montrer qu'elle est égale à

$$\hat{P}(\omega) = \frac{1 - e^{-i(N+1)T\omega}}{1 - e^{-iT\omega}}.$$



   On reconnaîtra une somme géométrique.

$$\hat{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{N} \hat{\delta}_{kT}(\omega) = \sum_{k=0}^{N} e^{-ikT\omega} = \sum_{k=0}^{N} (e^{-iT\omega})^k.$$

   On reconnaît une somme géométrique de raison $e^{-iT\omega}$. Donc $\hat{P}(\omega) = \frac{1-e^{-i(N+1)T\omega}}{1-e^{-iT\omega}}$.

3. Factoriser par $e^{-i\frac{N+1}{2}T\omega}$ au numérateur et par $e^{-i\frac{1}{2}T\omega}$ au dénominateur et en déduire que

$$\left|\hat{P}(\omega)\right| = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}T\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}T\omega\right)}.$$

$$\hat{P}(\omega) = \frac{e^{-i(N+1)T\omega/2}}{e^{-iT\omega/2}} \frac{e^{i(N+1)T\omega/2} - e^{-i(N+1)T\omega/2}}{e^{iT\omega/2} - e^{iT\omega/2}} = \frac{e^{-i(N+1)T\omega/2}}{e^{-iT\omega/2}} \frac{2i\sin((N+1)T\omega/2)}{2i\sin(iT\omega/2)}.$$

   On passe au module et il reste

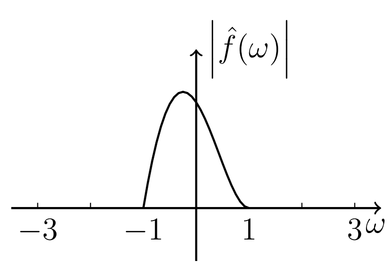
$$\left|\hat{P}(\omega)\right| = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}T\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}T\omega\right)}.$$

   Soit f un signal que l'on a échantillonné avec un pas T. Le signal capté est alors égal à $g(t) = f(t)P(t)$

4. Exprimer la transformée de g en fonction de celles de f et P.

   La transformée d'un produit est un produit de convolution : $\hat{g} = \hat{f} * \hat{P}$.

   On peut montrer que si l'échantillonnage est infini ($N = +\infty$), on obtient $\hat{g}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - k\frac{2\pi}{T})$. On se donne le spectre de f ci-contre.



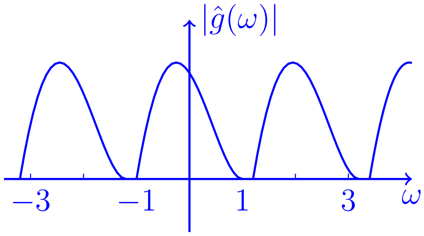
5. D'après le graphe, que peut-on dire des fréquences présentes dans le signal f ?

   Le spectre de f a pour support l'intervalle $[-1, 1]$. Le signal f n'est composé que de fréquences comprises entre 0 et 1.

6. On choisit un pas $T = 2\pi$. Représenter la fonction $\hat{g}$ correspondante.
7. Faire de même avec $T = 4\pi$.
8. Expliquer pourquoi ce dernier pas d'échantillonnage est trop grand pour pouvoir espérer retrouver la fonction f initiale. Comment doit-on choisir le pas d'échantillonnage en fonction des fréquences qui composent le signal étudié ?

   Le terme $\hat{f}(\omega - k\frac{2\pi}{T})$ représente un décalage du spectre $\hat{f}$ de $k\frac{2\pi}{T}$ vers la droite. Pour obtenir $\hat{g}$, il faut considérer tous les décalages de $\hat{f}$ et les sommer. Si T est trop grand, le décalage minimal $\frac{2\pi}{T}$ est trop petit et les différents décalages de $\hat{f}$ se superposent. Les sommer devient difficile et surtout, on ne sera plus en mesure de retrouver le spectre initial $\hat{f}$.

   Si T est assez petit ($T < \pi$ pour notre exemple), les décalages de $\hat{f}$ ne se superposent plus et $\hat{g}$ est simplement constitué de copies de $\hat{f}$:

   Pour retrouver le signal f initial, il suffit alors d'appliquer à g un filtre ne laissant passer que les fréquences comprises entre 0 et 1. On retrouvera ainsi le spectre $\hat{f}$ initial et le signal f correspondant.

   Il s'agit du théorème d'échantillonnage de Shannon : si le signal f a un spectre borné, alors il est possible de le recomposer parfaitement à partir d'un échantillonnage, pour peu que le pas d'échantillonnage soit suffisamment petit.