Devoir 3

Procédé de radiodiffusion AM

Le but de ce problème est de comprendre le fonctionnement de la modulation d'amplitude.

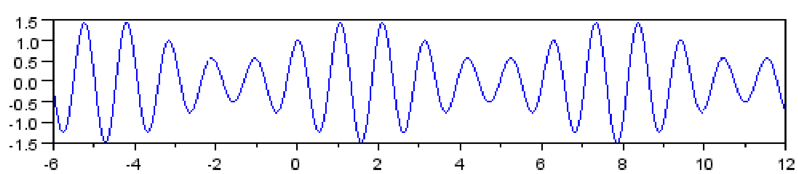
On souhaite émettre un signal radio $f(t)$ dont le spectre est situé dans le domaine audible $0 - 20kH$. Avant de l'émettre, on veut lui attribuer une certaine bande de fréquence. On calcule pour cela la fonction

$$g(t) = e^{i\omega_p t}\left(1 + \tfrac{1}{2}f(t)\right),$$

avec ω_p de l'ordre de $100kH$. On admet qu'un montage électrique (utilisant des multiplicateurs) permet d'obtenir le signal g à partir du signal f.

1. **Modulation** (5 points)

   (a) Pour $f(t) = \sin(t)$ et $\omega_p = 6$, représenter les graphes de $f(t)$, $\cos(\omega_p t)$ et $\cos(\omega_p t)(1 + \frac{1}{2}f(t))$.



   (b) Démontrer que pour tout signal $z(t)$, $\widehat{e^{iat}z(t)}(\omega) = \hat{z}(\omega - a)$.

$$\widehat{e^{iat}z(t)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat}z(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-i(\omega-a)t}dt = \hat{z}(\omega - a).$$

   (c) En déduire, en utilisant $\hat{1} = 2\pi\delta_0$, que $\widehat{e^{i\omega_p t}}(\omega) = 2\pi\delta_{\omega_p}(\omega)$.

En utilisant 1-a :

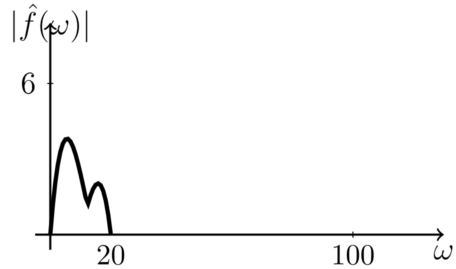
$$\widehat{e^{i\omega_p t} \times 1}(\omega) = \hat{1}(\omega - \omega_p) = 2\pi\delta_0(\omega - \omega_p) = 2\pi\delta_{\omega_p}(\omega).$$

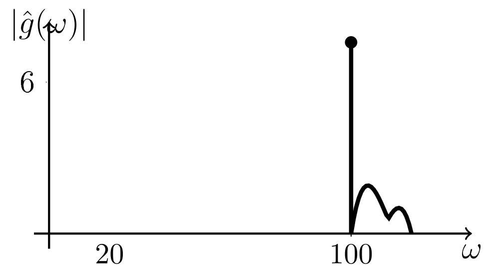
(d) Déduire des deux questions précédentes l'expression de $\hat{g}(\omega)$ en fonction de $\hat{f}$.

$g(t) = e^{i\omega_p t} + \frac{1}{2}e^{i\omega_p t}f(t)$, donc

$$\hat{g}(\omega) = \widehat{(e^{i\omega_p t})} + \frac{1}{2}\widehat{e^{i\omega_p t}f(t)} = 2\pi\delta_{\omega_p}(\omega) + \frac{1}{2}\hat{f}(\omega - \omega_p).$$

(e) On représente ci-contre le spectre de f, c'est-à-dire le graphe de $|\hat{f}|$.
Représenter le spectre de g correspondant.
On considère que $\omega_p = 100kH$. Le spectre de g est obtenu en décalant le spectre de f et en ajoutant un Dirac en ω_p.





2. **Filtrage** (9 points)

Après avoir ainsi transformé le signal f en g, on émet ce signal g. Le récepteur capte ce signal ainsi que d'autres signaux situés sur des bandes de fréquences différentes (c'est l'intérêt de la modulation !). On note $\tilde{g}$ le signal global capté par le récepteur. Pour récupérer le signal g qui nous intéresse, il faut appliquer un filtre passe-bande.

(a) À l'aide du théorème d'inversion, déterminer la fonction idéale $h(t)$ telle que $\hat{h}(\omega) = \mathbf{1}_{[100,120]}$.

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{100}^{120} e^{i\omega t}d\omega = \frac{e^{i120t} - e^{i100t}}{2i\pi t}.$$

(b) On considère le filtre qui à un signal d'entrée $e(t)$ renvoie en sortie le signal $s(t) = e * h(t)$. Justifier que ce filtre agit comme un passe-bande.

On obtient $\hat{s}(\omega) = \hat{e}(\omega)\hat{h}(\omega) = \hat{e}(\omega) \times \mathbf{1}_{[100,120]}$. Autrement dit, le spectre de s est obtenu en ne gardant du spectre de e que les valeurs situées entre $\omega = 100$ et $\omega = 120$. Il s'agit bien d'un filtre passe-bande.

Un tel filtre avec une telle fonction h est impossible à réaliser avec un montage électrique. Pour réaliser simplement un filtre passe-bande, on utilise un circuit RLC en série. Si on note $e(t)$ la tension en entrée du circuit, la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance satisfait alors l'équation différentielle

$$LCu'' + RCu' + u = RCe'.$$

(c) En considérant les conditions initiales $e(0) = u(0) = u'(0) = 0$, déterminer la fonction de transfert du circuit, c'est-à-dire le rapport des transformées de Laplace de u et e : $H(p) = \frac{L(u)(p)}{L(e)(p)} = \frac{U(p)}{U(e)}$.

Passons à la transformée de Laplace dans l'équation :

$$LC(p^2L(u) - pu(0) - u'(0)) + RC(pL(u) - u(0)) + L(u) = RC(pL(e) - e(0))$$

$$(LCp^2 + RCp + 1)L(u) = RCpL(e)$$

Donc finalement

$$H(p) = \frac{RCp}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{1}{\frac{L}{R}p + 1 + \frac{1}{RCp}}.$$

(d) Afin d'analyser l'action du circuit sur les fréquences de $e(t)$, on pose $p = i\omega$. Vérifier qu'en module on obtient

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L}{R^2C}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)^2}}.$$

$H(i\omega) = \frac{1}{1+i(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}}$, donc

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L}{R^2C}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)^2}}.$$

(e) Que vaut $|H(i\omega)|$ lorsque ω est très supérieur ou très inférieur à $\frac{1}{\sqrt{LC}}$? Et lorsque $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$? Quelle est l'action du circuit sur le signal d'entrée $e(t)$?

$|H(i\omega)|$ tend vers 0 quand ω tend vers 0 ou vers $+\infty$ et $|H(i/\sqrt{LC}| = 1$. Si on trace précisément le graphe de $|H(i\omega)|$, on obtient une fonction valant près de 1 pour les fréquences proches de $1/\sqrt{LC}$ et 0 ailleurs. Le circuit agit donc comme un filtre passe-bande pour les fréquences proches de $1/\sqrt{LC}$.

(f) Pour filtrer les fréquences situées entre 100 et $120kH$, comment doit-on choisir R, L et C ?

D'après la question précédente, il faut que $1/\sqrt{LC} \approx 110$. Et il faut de plus choisir R de manière à ce que l'intervalle où $|H(i\omega)| \approx 1$ soit de longueur 20.

3. **Démodulation** (5 points)

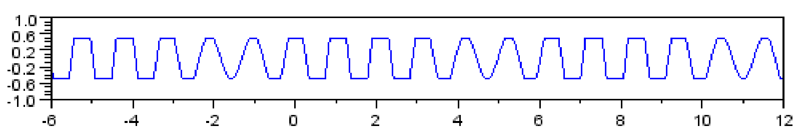
On considère maintenant que le récepteur a récupéré le signal $g(t) = e^{i\omega_p t}(1 + \frac{1}{2}f(t))$ et on souhaite maintenant récupérer le signal f initial. Il faut pour cela réussir à déterminer précisément la fréquence ω_p qui a servi à la modulation. Comme on sait que cette fréquence est de l'ordre de $100kH$, on pourrait appliquer un filtre passe-bande autour de cette fréquence.

(a) En vous appuyant sur le spectre obtenu en 1-d, expliquer pourquoi ce filtrage ne permettrait pas de déterminer parfaitement ω_p.

On aimerait n'isoler que la fréquence ω_p. D'après le spectre de g, le filtrage des fréquences proches de 100 ne supprimera pas les plus basses fréquences de f qui se retrouvent également près de ω_p. On ne récupérera pas que le terme $e^{i\omega_p t}$.

On propose d'écrêter le signal avant d'appliquer le filtre passe-bande. On considère ici g en partie réelle (donc $g(t) = \cos(\omega_p t)(1+\frac{1}{2}f(t))$). On suppose que f est d'amplitude inférieure à 1 et on crée un montage qui permet de plafonner à $\frac{1}{2}$ toutes les valeurs de $g(t)$. On remplace ainsi $g(t)$ par $\frac{1}{2}$ si $g(t) > \frac{1}{2}$ et par $-\frac{1}{2}$ si $g(t) < -\frac{1}{2}$ et on conserve les autres valeurs de $g(t)$.

(b) Représenter le signal ainsi obtenu pour l'exemple de la question 1-a.



(c) Expliquer qualitativement (en raisonnant sur les fréquences de ce nouveau signal) pourquoi le filtre passe-bande appliqué à ce nouveau signal permettra mieux d'estimer ω_p.

Par rapport au signal g initial, on voit que les basses fréquences sont nettement moins perceptibles dans ce nouveau signal. L'écrêtement a permis d'atténuer la modulation due à f et il ne reste essentiellement qu'un signal sinusoïdal de fréquence ω_p. Le spectre de ce nouveau signal ne contiendra presque que le Dirac en ω_p et le filtrage autour de $100kH$ sera cette fois très efficace.

(d) Une fois la fréquence ω_p obtenue, quelle opération simple doit-on faire subir à $g(t)$ pour retrouver le signal $f(t)$ initialement émis ?

Une fois la fréquence ω_p connue, on peut effectuer l'opération $(e^{-i\omega_p t}g(t) - 1) \times 2 = f(t)$. On retrouve ainsi le signal f initial.