Contrôle 3

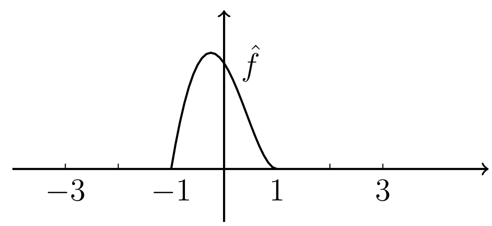
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : théorème de Shannon

Quelques formules pouvant servir :

$$\hat{\delta}_{t_0}(\omega) = e^{-i\omega t_0}, \quad \widehat{g * h} = \hat{g}\hat{h}, \quad \widehat{gh} = \hat{g} * \hat{h}, \quad \textit{si } g(t) = h(t - t_0), \textit{ alors } \hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)e^{-i\omega t_0}.$$

On considère la fonction f dont le spectre de Fourier est représenté ci-contre.
L'objectif est de recomposer le signal f à partir d'un bon échantillonnage de f.



1. Préliminaires
   (a) Soit $\mathbf{1}_{[-1,1]}$ le signal porte. Calculer sa transformée de Fourier.
   (b) À l'aide du théorème d'inversion, montrer que $\widehat{\text{sinc}}(\omega) = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}(\omega)$.
   (c) D'après le graphe, que peut-on dire des fréquences présentes dans le signal f ?
   (d) Soit g une fonction réelle intégrable et $t_0 \in \mathbf{R}$. Montrer, en utilisant soit la définition du produit de convolution, soit la transformée de Fourier, que $g * \delta_{t_0}(t) = g(t - t_0)$.
   (e) Représenter le graphe de la fonction $\hat{f} * \delta_2$. Représenter également celui de la fonction $\hat{f} * (\delta_2 + \delta_5)$.

2. Échantillonnage
   On a échantillonné f avec un pas $T = \pi$ (on remarque que $\frac{2\pi}{T} = 2 \times 1$).
   On note $P(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{k\pi}(t)$ le peigne de Dirac correspondant et on associe à l'échantillonnage de f la fonction $f^* = \pi f \times P = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi)\delta_{k\pi}$.
   On admet enfin que la transformée de Fourier de P est $\widehat{P}(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{2k}(\omega)$.
   (a) Montrer que $\widehat{f^*}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega - 2k)$.
   (b) Représenter le graphe de $\widehat{f^*}$.
   (c) En déduire que $\hat{f}(\omega) = \widehat{f^*} \times \mathbf{1}_{[-1,1]}$.
   (d) En déduire la formule de Shannon qui permet de recomposer f à partir de ses valeurs échantillonnées :

$$\forall t, \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi)\text{sinc}(t - k\pi).$$

Exercice 2 : circuit RC et filtrage

1. Filtrage

   On cherche à déterminer les caractéristiques d'un certain filtre linéaire. On a pris comme signal d'entrée l'échelon unité $u(t)$ et on a obtenu en sortie le signal $s(t) = e^{-at}$ avec $a > 0$. On sait que cette sortie s'exprime sous la forme $s = u * h$ où h est une fonction caractérisant le filtre.

   (a) Déterminer la transformée de Laplace $H = L(h)$ de h (c'est la fonction de transfert du filtre).

   (b) Que valent $H(0)$ et $\lim_{p \to +\infty} H(p)$?

   (c) Représenter l'allure du graphe de $H(p)$.

   Avec $p = i\omega$, la fonction $\omega \mapsto H(i\omega)$ représente la transformée de Fourier de h. Le graphe de $|H(i\omega)|$ a la même allure que le graphe précédent.

   (d) Quelle est l'action de ce filtre en terme de fréquences ?

2. Circuit RC

   On considère un circuit RC. On note $e(t)$ la tension en entrée du circuit et $v(t)$ la tension aux bornes de la résistance. On suppose qu'à l'instant initial $e(0) = v(0) = 0$.

   L'évolution de v est décrite par l'équation différentielle

   $$RCv'(t) + v(t) = RCe'(t).$$

   Nous noterons $a = \frac{1}{RC}$.

   (a) Déterminer la transformée de Laplace $V = L(v)$ en fonction de la transformée $E = L(e)$ de e.

   (b) Comment se comporte ce circuit ?

   (c) Déterminer l'expression de $v(t)$ pour $e(t) = t$.

   (d) Même question pour $e(t) = \sin(t)$.
   Il est interdit d'utiliser le résultat de la question suivante.

   (e) Pour $e(t) = \sin(\omega t)$, on obtient

   $$v(t) = \frac{\omega^2}{a^2 + \omega^2} \sin(\omega t) + \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} \cos(\omega t) - \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at}.$$

   Que peut-on dire de $v(t)$ quand ω est très proche de 0 et quand ω est très grand ? Est-ce cohérent avec les résultats des questions 1-d et 2-b ?