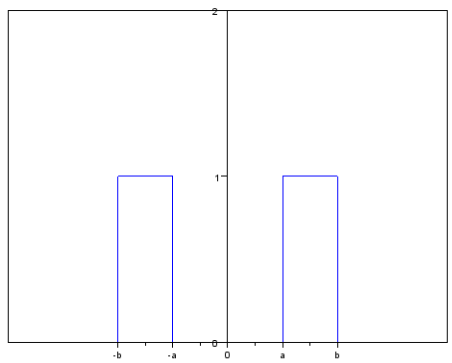
Contrôle 3

La calculatrice est interdite.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 : Transformée de Fourier.

Soient $b > a > 0$ des nombres réels. Le but de cet exercice est de déterminer la fonction h dont la transformée de Fourier est la fonction $\hat{h} = \mathbf{1}_{[-b,-a]} + \mathbf{1}_{[a,b]}$ représentée ci-dessous :

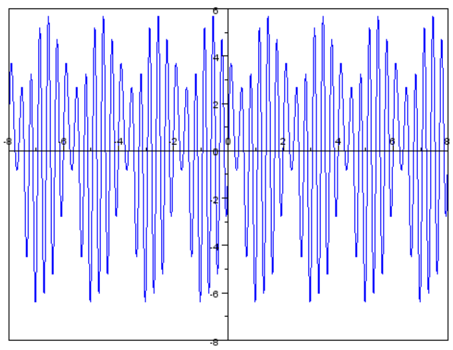


Graphe de $\hat{h}$.

1. Déterminer l'expression de h en utilisant le théorème d'inversion de Fourier.
2. Déterminer de nouveau h par une autre méthode, en considérant que $\hat{h}$ est la somme de deux translatées de la fonction porte $\mathbf{1}_{[\frac{a-b}{2},\frac{b-a}{2}]}$.
   On donne les formules suivantes :
$$\text{Si} \quad f(t) = \frac{b-a}{2\pi}\text{sinc}(t(b-a)/2), \quad \text{alors} \quad \hat{f} = \mathbf{1}_{[\frac{a-b}{2},\frac{b-a}{2}]}$$
$$\text{Si} \quad \hat{g}_1(\nu) = \hat{g}_2(\nu - \lambda), \quad \text{alors} \quad g_1(t) = g_2(t)e^{i\lambda t}.$$
3. On considère le filtre qui à tout signal entrant e associe le signal sortant $s = e * h$. Décrire le spectre de Fourier $\hat{s}$ de s en fonction de celui de e.
   On pourra se donner un graphe de $\hat{e}$ et représenter celui de $\hat{s}$ correspondant.
4. Quelle est l'action de filtre ?

Exercice 2 : Filtrage

On a reçu le signal f ci-dessous. On souhaite extraire de f ses basses fréquences.

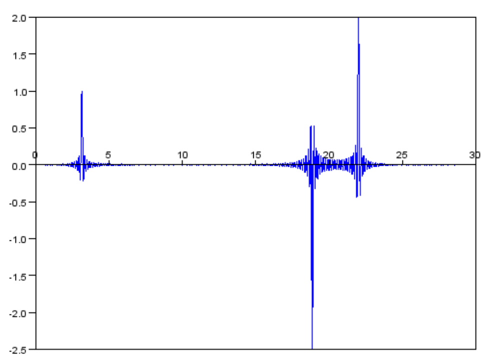


Graphe de f.

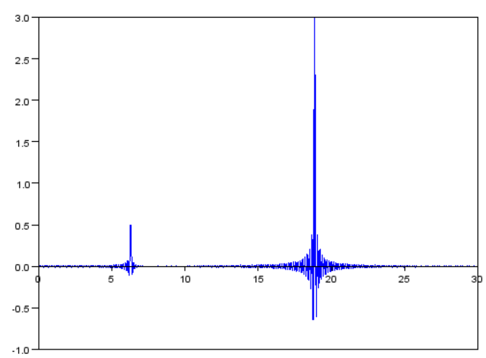
1. Quelle est la période T de f ?
2. On a calculé de manière approchée la transformée de Fourier de f. Plus précisément, on a calculé numériquement pour chaque fréquence ν les moyennes des fonctions $x \mapsto 2f(x)\cos(\nu x)$ et $x \mapsto 2f(x)\sin(\nu x)$:

$$a(\nu) = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\cos(\nu x)dx, \qquad b(\nu) = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\sin(\nu x)dx.$$

   Prenons par exemple $\nu = \pi$. Expliquer pourquoi lorsque L est assez grand, $a(\pi)$ fournit une bonne approximation du coefficient de Fourier a_1 de f.
3. On donne ci-dessous les graphes de a et b obtenus pour ν variant de 0 à 30.



$a(\nu)$



$b(\nu)$

   Déterminer l'expression de f sous forme d'une série de Fourier simple, puis représenter le graphe du signal f auquel on aura retiré les termes de fréquence supérieure à 10.

Exercice 3 : Équation des ondes amortie

On considère une corde vibrante de longueur 1. Si l'on souhaite tenir compte des frottements entre la corde et l'air, il faut ajouter un terme d'amortissement dans l'équation des ondes. Si on note $y(x,t)$ la hauteur de la corde au point $x \in [0,1]$ et à l'instant t, l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial y}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

où a et ν sont des constantes strictement positives telles que $a < \pi\nu$. La corde étant fixée en ses extrêmités, on a pour tout t, $y(0,t) = y(1,t) = 0$.

Nous allons commencer par déterminer les solutions stationnaires de ce problème. Soit y une solution de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$. On suppose que y n'est pas la fonction nulle.

1. Injecter y dans l'équation des ondes amortie, séparer les variables et montrer qu'il existe une constante λ telle que $U'' = \lambda U$. Donner l'équation différentielle satisfaite par V.

   Avec les conditions au bord, on sait ensuite démontrer que λ est nécessairement de la forme $\lambda = -(k\pi)^2$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ et que U est de la forme $U(x) = A\sin(k\pi x)$ avec $A \in \mathbf{R}$.
2. Déterminer les solutions V correspondant aux différentes valeurs possibles de λ.

   On obtient finalement que les solutions stationnaires sont les fonctions de la forme

   $$y_k(x,t) = \sin(k\pi x)e^{-at}(B\cos(\mu_k t) + C\sin(\mu_k t)),$$

   où k est un entier positif, B et C sont des constantes réelles et $\mu_k = \sqrt{k^2\pi^2\nu^2 - a^2}$.
3. Représenter $y_1(x,0)$ en fonction de x puis décrire l'évolution globale de la fonction y_1 au cours du temps. Faire de même avec la fonction y_2.
4. La solution générale du problème s'écrit comme une combinaison de solutions stationnaires :

   $$y(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)e^{-at}(B_k\cos(\lambda_k t) + C_k\sin(\lambda_k t)).$$

   On ajoute des conditions initiales : à l'instant t=0, la hauteur de la corde vérifie

   $$y(x,0) = y_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x),$$

   où y_0 et y_1 sont des fonctions définies sur $[0,1]$.
   Déterminer alors l'unique solution du problème, c'est-à-dire exprimer les coefficients B_k et C_k en fonction de y_0 et y_1.