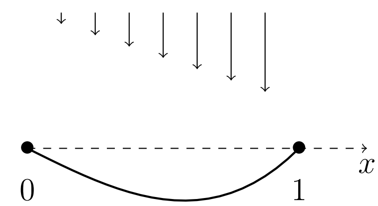
Devoir 2

Corde excitée

On considère une corde horizontale de longueur 1, initialement au repos en position horizontale. À partir de l'instant $t = 0$, elle est excitée par un vent vertical d'intensité représentée ci-contre.



On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde en x à l'instant t. Son évolution est modélisée par

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in]0,1[, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x,$$

avec les conditions au bord : $\forall t, \quad y(0,t) = 0 \quad$ et $\quad y(1,t) = 0$.

1. Déterminer la solution à l'équilibre du problème, c'est-à-dire la solution $y_{eq}(x)$ ne dépendant que de x.

   On injecte y_{eq} dans l'équation des ondes : $\frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial x^2} = y''_{eq}(x)$. Donc $0 = y''_{eq}(x) - x$, soit $y''_{eq}(x) = x$ qui s'intègre en $y_{eq}(x) = \frac{x^3}{6} + ax + b$.
   De plus les conditions aux bords impliquent que $y_{eq}(0) = y_{eq}(1) = 0$, ce qui permet de déduire que $b = 0$ et $a = -\frac{1}{6}$.
   La solution à l'équilibre est donc : $y_{eq}(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}$. Son allure est celle représentée au début du sujet.

2. En déduire l'expression de la solution générale $y(x,t)$ du problème.

   La solution générale est la somme de la solution générale du problème du cours et d'une solution particulière, par exemple la solution à l'équilibre que nous venons de déterminer :

   $$y(x,t) = y_{eq}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)\left(A_k \cos(k\pi t) + B_k \sin(k\pi t)\right).$$

3. Les conditions initiales du problème s'écrivent : à $t = 0$, $y(x,0) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. Injecter ces conditions dans la solution générale obtenue en 2 et en déduire l'expression sous forme intégrale des coefficients A_k et B_k. On ne demande pas de calculer explicitement les coefficients A_k.

   Injectons les conditions initiales dans la solution générale : à $t = 0$,

   $$\begin{aligned} y(x,0) = 0 &= y_{eq}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)\left(A_k \cos(k\pi 0) + B_k \sin(k\pi 0)\right) \\ &= \frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(k\pi x) \end{aligned}$$

Donc : $-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{6}=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(k\pi x)$. Nous reconnaissons une série de Fourier, donc les A_k sont les coefficients de Fourier et se calculent ainsi :

$$\forall k, \quad A_k = 2\int_0^1 (-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{6})\sin(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

De même, à $t=0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0 &= 0+\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(k\pi x)\left(-k\pi A_k\sin(k\pi 0)+k\pi B_k\cos(k\pi 0)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\pi B_k \sin(k\pi x)\end{aligned}$$

Il s'agit cette fois de la série de Fourier de la fonction nulle, donc tous les coefficients B_k sont nuls.

Les solutions du problème du cours :

$$\forall t>0, \quad \forall x\in]0,1[, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \textit{et} \qquad \forall t, \quad y(0,t)=0 \quad \textit{et} \quad y(1,t)=0$$

sont de la forme

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin(k\pi x)\left(A_k\cos(k\pi t)+B_k\sin(k\pi t)\right)$$

avec

$$A_k = 2\int_0^1 y_0(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x \qquad B_k=\frac{2}{k\pi}\int_0^1 v_0(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x.$$