Devoir 2

Corde soulevée d'un côté

On considère une corde horizontale de longueur 1, initialement à l'équilibre. Une de ses extrémités est soulevée petit à petit tandis que l'autre reste fixée.

On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde en x à l'instant t. Son évolution est modélisée par

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}, \qquad \text{avec les conditions au bord : } \forall t, \quad \boxed{y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(1,t) = t.}$$

1. **Préliminaires**
   (a) Déterminer la fonction φ telle que : $\forall x,\ \varphi''(x) = 0$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \lambda$.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2-périodique impaire définie sur $]-1,1[$ par $\psi(x) = x$ et écrire sa série de Fourier.

2. **Solution particulière**
   On cherche une solution du problème de la forme : $y_p(x,t) = f(x)g(t)$.
   (a) Appliquer à y_p la condition en $x = 1$ et en déduire l'expression de $g(t)$.
   (b) Montrer ensuite que y_p est solution du problème si et seulement si f satisfait les conditions de la question 1-a.
   (c) En déduire que $y_p(x,t) = xt$.

3. **Solution du problème**
   La solution générale y du problème s'obtient comme la somme de la solution particulière y_p obtenue précédemment et de la solution du problème traité en cours :

$$y(x,t) = y_p(x,t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)(A_k \cos(\nu k\pi t) + B_k \sin(\nu k\pi t))$$

   La corde étant initialement à l'équilibre, les conditions initiales du problème sont :

$$\text{à } t = 0, \quad y(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

   (a) Appliquer la première condition ci-dessus à la solution générale y et en déduire l'expression des coefficients A_k.
   (b) Faire de même avec la seconde condition et déterminer l'expression des B_k.
   (c) Si on ne garde que les premiers coefficients de Fourier de la somme, on obtient $y(x,t) \approx y_p(x,t) + \sin(\pi x)(A_1 \cos(\nu\pi t) + B_1 \sin(\nu\pi t))$ qui est une approximation satisfaisante de la solution.
   Représenter l'allure de cette fonction pour différentes valeurs de t.

Les coefficients de Fourier d'une fonction ψ 2-périodique impaire sont donnés par

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad a_k = 0 \quad \textit{et} \quad b_k = \int_{-1}^{1} h(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 h(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x.$$