# Devoir 2

## Corde soulevée d'un côté

On considère une corde horizontale de longueur 1, initialement à l'équilibre. Une de ses extrémités est soulevée petit à petit tandis que l'autre reste fixée.

On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde en $x$ à l'instant $t$. Son évolution est modélisée par

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}, \qquad \text{avec les conditions au bord : } \forall t, \quad \boxed{y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(1,t) = t.}$$

1. **Préliminaires**

   (a) Déterminer la fonction $\varphi$ telle que : $\forall x,\ \varphi''(x) = 0,\ \varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \lambda$.

   On intègre l'équation $\varphi'' = 0$ : $\varphi'(x) = a$, donc $\varphi(x) = ax + b$. Comme $\varphi(0) = 0$, $b = 0$ et comme $\varphi(1) = \lambda$, on déduit $a = \lambda$. Ainsi $\varphi(x) = \lambda x$.

   (b) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2-périodique impaire définie sur $]-1,1[$ par $\psi(x) = x$ et écrire sa série de Fourier.

   La fonction $\psi$ est impaire, donc ses coefficients $a_k$ sont tous nuls. Ses coefficients $b_k$ sont (en utilisant une intégration par partie) donnés par :

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^{1} x \sin(\pi k x)\mathrm{d}x \\ &= \left[ x \frac{-\cos(\pi k x)}{k\pi} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{-\cos(\pi k x)}{k\pi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-(-1)^k - (-1)^k}{k\pi} + \left[ x \frac{\sin(\pi k x)}{k^2\pi^2} \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{-2(-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

2. **Solution particulière**

   On cherche une solution du problème de la forme : $y_p(x,t) = f(x)g(t)$.

   (a) Appliquer à $y_p$ la condition en $x = 1$ et en déduire l'expression de $g(t)$.

   En $x = 1$, on doit avoir $y_p(1,t) = t$, donc $f(1)g(t) = t$, donc $g(t) = \frac{t}{f(1)}$.

   (b) Montrer ensuite que $y_p$ est solution du problème si et seulement si $f$ satisfait les conditions de la question 1-a.

   On déduit ainsi que $y_p(x,t) = tf(x)/f(1)$. On injecte cette expression dans l'équation des ondes : $0 = \nu^2 t f''(x)/f(1)$. Donc $f''(x) = 0$. D'autre part la condition au bord en 0 de $y_p$ donne : $y_p(0,t) = f(0)t = 0$. Donc $f(0) = 0$. Ainsi $f$ est vérifie bien les conditions de la question 1-a en notant $\lambda = f(1)$.

(c) En déduire que $y_p(x,t) = xt$.

On déduit de la question 1-a que $f(x) = f(1)x$ et donc que $y_p(x,t) = f(1)xt/f(1) = xt$.

3. **Solution du problème**

La solution générale $y$ du problème s'obtient comme la somme de la solution particulière $y_p$ obtenue précédemment et de la solution du problème traité en cours :

$$y(x,t) = y_p(x,t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)(A_k \cos(\nu k\pi t) + B_k \sin(\nu k\pi t))$$

La corde étant initialement à l'équilibre, les conditions initiales du problème sont :

$$\text{à } t=0, \quad y(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

(a) Appliquer la première condition ci-dessus à la solution générale $y$ et en déduire l'expression des coefficients $A_k$.

À $t = 0$, on obtient $y(x,0) = x \times 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(k\pi x)$. Comme $y_p(x,0) = 0$, on déduit $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(k\pi x) = 0$. Cette série de Fourier étant nulle, on déduit que ses coefficients sont tous nuls également : $\forall k,\ A_k = 0$.

(b) Faire de même avec la seconde condition et déterminer l'expression des $B_k$.

Dérivons l'expression de $y$ par rapport à $t$ :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)(-\nu k\pi A_k \sin(\nu k\pi t) + \nu k\pi B_k \cos(\nu k\pi t)).$$

À $t = 0$, cela donne

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \nu k\pi B_k \sin(k\pi x).$$

On sait que $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ est nulle, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \nu k\pi B_k \sin(k\pi x) = -x$. Cette série de Fourier est donc la série de la fonction $-x$ qu'on a étudiée (au signe près) dans la question $1-b$. On en déduit que les coefficients de la série sont donnés par : $\forall k,\ \ \nu k\pi B_k = -\dfrac{-2(-1)^k}{k\pi}$. Finalement :

$$\forall k, \quad B_k = \frac{2(-1)^k}{\nu k^2\pi^2}.$$

(c) Si on ne garde que les premiers coefficients de Fourier de la somme, on obtient $y(x,t) \approx y_p(x,t) + \sin(\pi x)(A_1 \cos(\nu\pi t) + B_1 \sin(\nu\pi t))$ qui est une approximation satisfaisante de la solution.

Représenter l'allure de cette fonction pour différentes valeurs de $t$.

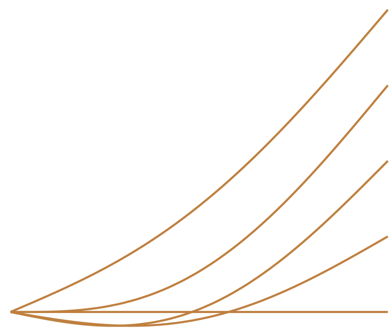
Conclusion : la solution de notre problème, initialement à l'équilibre est donnée par :

$$y(x,t) = xt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{\nu k^2\pi^2} \sin(k\pi x)\sin(\nu k\pi t).$$

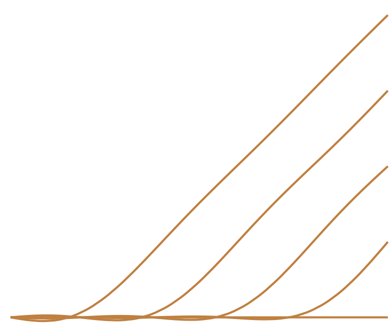
En ne gardant que le premier terme de la série, on obtient

$$y(x,t) \approx xt + \frac{-2}{\nu\pi^2} \sin(\pi x)\sin(\nu\pi t).$$

À $t$ fixé, la fonction $x \mapsto xt$ est une fonction linéaire et $x \mapsto \frac{-2}{\nu\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\nu\pi t)$ est une fonction sinusoïdale. La corde s'élève en prenant une forme sinusoïdale.



On constate que pour $t$ petit, la corde passe sous l'axe des abscisses, ce qui ne semble pas logique. C'est simplement lié au fait que notre approximation par un seul terme de la série n'est pas assez précise. Pour se donner une idée, nous avons représenté notre solution en calculant plus de termes de la série (5 termes pour être précis).



On voit qu'il y a encore des défauts, mais cette allure correspond bien au phénomène étudié.

*Les coefficients de Fourier d'une fonction $\psi$ 2-périodique impaire sont donnés par*

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad a_k = 0 \quad et \quad b_k = \int_{-1}^{1} h(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 h(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x.$$