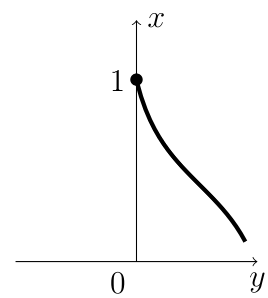
Devoir 2

Exercice : Chaînette semi-libre

On considère une corde fixée au point $(0,1)$. Elle est homogène, de masse non négligeable et sa longueur importe peu. On souhaite décrire ses oscillations autour de l'axe vertical. (La situation est analogue à celle du pendule simple sauf que la corde est non rigide.)



On note $y(x,t)$ la distance (algébrique) de la corde à l'axe vertical à la hauteur x et à l'instant t. En supposant, entre autres, que la corde reste proche de l'axe vertical, son mouvement est décrit par une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

et la condition au bord se traduit par : $\forall t, \quad y(1,t) = 0$.

On cherche les solutions stationnaires de ce problème : il s'agit des solutions de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$. Elles correspondent aux modes propres de vibration de la corde.

1. Injecter cette fonction dans l'équation aux dérivées partielles, séparer les variables et montrer que U et V sont solutions de certaines équations différentielles en une seule variable.
2. De quel type sont ces deux équations différentielles ? Résoudre l'équation satisfaite par V.

   L'autre équation peut se résoudre en faisant appel aux fonctions de Bessel. On montre que U est de la forme
   $$U(x) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda x}),$$
   où J_0 désigne la fonction de Bessel, A et λ des constantes. Le graphe de J_0 est donné au verso.
3. Que peut-on déduire de la condition au bord ?
4. À quoi peuvent ressembler graphiquement les modes propres de vibration de cette corde ?

   On considère maintenant la présence d'un vent horizontal constant. L'équation de vibration devient alors
   $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + 2.$$
5. Déterminer la position à l'équilibre de la corde : on pourra la chercher sous la forme $y_{eq}(x,t) = ax + b$.
6. Soit maintenant $y(x,t)$ la solution générale de ce nouveau problème. Montrer que $y - y_{eq}$ est solution du problème initial et en déduire l'expression de la solution $y(x,t)$.

Graphe de la fonction J_0 sur $[-15, 15]$.