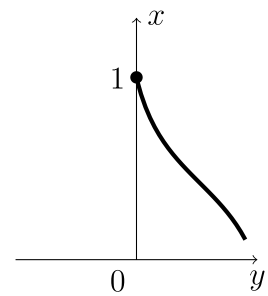
Devoir 2

Exercice : Chaînette semi-libre

On considère une corde fixée au point $(0, 1)$. Elle est homogène, de masse non négligeable et sa longueur importe peu. On souhaite décrire ses oscillations autour de l'axe vertical. (La situation est analogue à celle du pendule simple sauf que la corde est non rigide.)



On note $y(x, t)$ la distance (algébrique) de la corde à l'axe vertical à la hauteur x et à l'instant t. En supposant, entre autres, que la corde reste proche de l'axe vertical, son mouvement est décrit par une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

et la condition au bord se traduit par : $\forall t, \quad y(1, t) = 0$.

On cherche les solutions stationnaires de ce problème : il s'agit des solutions de la forme $y(x, t) = U(x)V(t)$. Elles correspondent aux modes propres de vibration de la corde.

1. Injecter cette fonction dans l'équation aux dérivées partielles, séparer les variables et montrer que U et V sont solutions de certaines équations différentielles en une seule variable.

   On injecte y dans l'équation du mouvement : $U(x)V''(t) = xU''(x)V(t) + U'(x)V(t)$. On sépare les variables x et t : $\frac{V''(t)}{V(t)} = \frac{xU''(tx)+U'(x)}{U(x)}$. On obtient une égalité entre une fonction de la variable t et une de la variable x. Une telle égalité n'est possible que si ces fonctions sont constantes :

   $$\frac{V''(t)}{V(t)} = \frac{xU''(tx) + U'(x)}{U(x)} = \lambda \in \mathbf{R}.$$

   On en déduit que U est solution de $xU''(x) + U'(x) - \lambda U(x) = 0$ et V est solution de $V''(t) - \lambda V(t) = 0$.

2. De quel type sont ces deux équations différentielles ? Résoudre l'équation satisfaite par V.

   Il s'agit d'équations différentielles linéaires d'ordre 2. L'équation satisfaite par V est de plus à coefficients constants, ce qui n'est pas le cas de celle de U.

   Résolvons l'équation de V. Ses solutions dépendent du signe de λ. Si $\lambda > 0$, elles sont de la forme $V(t) = Ae^{\sqrt{\lambda}t} + Be^{-\sqrt{\lambda}t}$. Si $\lambda = 0$, elles sont de la forme $V(t) = At + B$. Ces deux solutions semblent impossibles du point de vue de la physique. Si $A \neq 0$, elles signifieraient qu'au cours du temps, l'amplitude du mouvement de la corde augmenterait et tendrait vers $+\infty$ ce qui est absurde.

   Le seul cas réaliste est obtenu pour $\lambda > 0$. Les solutions de l'équation sont alors de la forme $V(t) = A\cos(\sqrt{-\lambda}t) + B\sin(\sqrt{-\lambda}t)$: la corde oscille périodiquement autour de l'axe vertical.

L'autre équation peut se résoudre en faisant appel aux fonctions de Bessel. On montre que U est de la forme

$$U(x) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda x}),$$

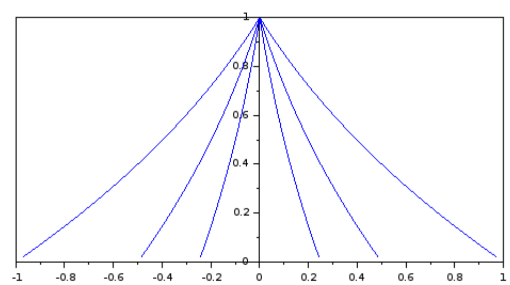
où J_0 désigne la fonction de Bessel, A et λ des constantes. Le graphe de J_0 est donné au verso.

3. Que peut-on déduire de la condition au bord ?

La condition au bord est : pour tout t, $y(1,t) = U(1)V(t) = 0$. On en déduit $U(1) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda}) = 0$. Ainsi $A = 0$ (ce qui ne présente aucun intérêt pour notre problème) ou $2\sqrt{-\lambda}$ est une racine de la fonction de Bessel J_0.

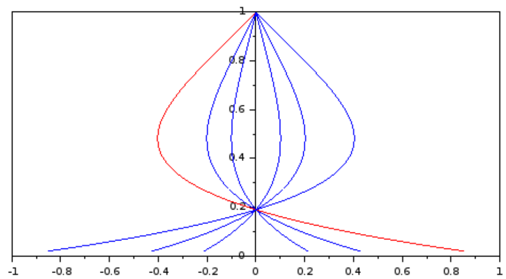
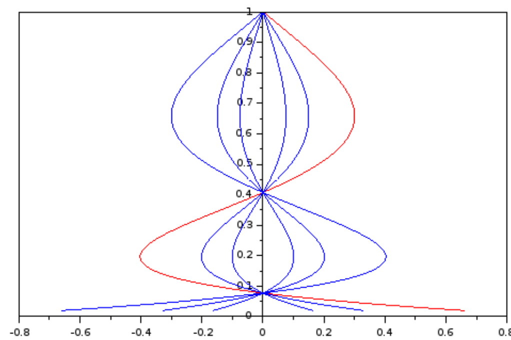
4. À quoi peuvent ressembler graphiquement les modes propres de vibration de cette corde ?

D'après le graphe de la fonction J_0, on est capable d'estimer les valeurs de ses premières racines et ainsi de représenter, à l'aide d'un ordinateur, les graphes des fonctions $U(x)$ correspondantes. Pour simplement s'en donner une idée, on peut remarquer que pour x entre 0 et 1, $U(x)$ prend les mêmes valeurs que J_0 entre 0 et sa racine considérée. Pour obtenir le premier mode de vibration de la corde, considérons la première racine de J_0 (proche de 2,5). Le graphe de U ressemble alors (en oubliant la présence de la racine carrée) au graphe de J_0 entre 0 et cette racine. En n'oubliant pas de retourner les axes Ox et Oy on obtient une mode la forme ci-dessous :



Son oscillation autour de l'axe Ox est donnée par la fonction V correspondante.

Pour le deuxième et le troisième mode de vibration, il faut considérer la deuxième et la troisième racines de J_0. Les modes ressembleront alros aux graphes de J_0 entre 0 et ces racines.

Leurs vitesses d'oscillations sont données par les fonctions V correspondantes : elles sont plus rapides que celle du premier mode.

On considère maintenant la présence d'un vent horizontal constant. L'équation de vibration devient alors

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + 2.$$

5. Déterminer la position à l'équilibre de la corde : on pourra la chercher sous la forme $y_{eq}(x,t) = ax + b$.

À l'équilibre, $y_{eq}(x,t) = y_{eq}(x)$ et l'équation du mouvement devient $0 = xy''_{eq}(x) + y'_{eq}(x) + 2$. Cherchons une solution de cette équation d'ordre 2 sous la forme $y_{eq}(x) = ax + b$. On injecte et on obtient $a + 2 = 0$. Donc $a = -2$. De plus la condition au bord implique $y_{eq}(1) = a + b = 0$. Donc $b = -a = 2$. Finalement, $y_{eq}(x) = -2x + 2$ est une solution du problème. À l'équilibre, la corde prend la forme d'une droite oblique dont la pente est liée à l'intensité du vent.

6. Soit maintenant $y(x,t)$ la solution générale de ce nouveau problème. Montrer que $y - y_{eq}$ est solution du problème initial et en déduire l'expression de la solution $y(x,t)$.

Les fonctions $y(x,t)$ et $y_{eq}(x,t)$ sont toutes deux des solutions du problème. Donc

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial x^2} + \frac{\partial y_{eq}}{\partial x} + 2.$$

Soustrayons ces deux égalités. Par linéarité on obtient

$$\frac{\partial^2 (y - y_{eq})}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 (y - y_{eq})}{\partial x^2} + \frac{\partial (y - y_{eq})}{\partial x}.$$

Ainsi $y - y_{eq}$ est solution de l'équation étudiée dans la première partie.
D'autre part, y et y_{eq} satisfont la condition au bord $y(1,t) = y_{eq}(1) = 0$, donc $y - y_{eq}$ la satisfait également. Donc $y - y_{eq}$ est solution du problème étudié dans la première partie. On peut l'écrire comme une somme de modes propres :

$$(y - y_{eq})(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(x)V_k(t).$$

Donc la solution générale de ce nouveau problème est de la forme

$$y(x,t) = -2x + 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(x)V_k(t).$$

Graphe de la fonction J_0 sur $[-15, 15]$.