Devoir 2

On considère une corde de longueur 1, fixée en ses extrémités, initialement au repos. On la soumet à une excitation dont l'intensité décroît au cours du temps. L'évolution de la hauteur $y(x,t)$ de la corde est décrite par l'équation

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \exp(-t).$$

Et les conditions aux bords se traduisent par : $\forall t,\ y(0,t) = y(1,t) = 0$.

1. On commence par chercher une solution particulière de l'équation (E).
   On pose $y_0(x,t) = f(x)\exp(-t)$. Montrer que y_0 est solution de l'équation si f est solution d'une équation différentielle à déterminer.
2. Vérifier que la fonction $y_0(x) = \left(1 - \frac{\mathrm{ch}(x-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})}\right)\exp(-t)$ est une solution de (E) et qu'elle satisfait les conditions aux bords.
3. On cherche maintenant la solution de notre problème sous la forme $y(x,t) = \tilde{y}(x,t) + y_0(x,t)$.
   Montrer que si y est solution du problème, alors $\dfrac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$.
4. Notre solution doit satisfaire les conditions initiales : $\forall x,\ y(x,0) = 0$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$.
   En déduire les expressions de $\tilde{y}(x,0) = 0$ et $\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(x,0)$.
5. En déduire les expressions de $\tilde{y}(x,t)$ et de $y(x,t)$.

On rappelle que si $y(x,t)$ satisfait $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et $\forall t,\ y(0,t) = y(1,t) = 0$, alors $y(x,t)$ est donnée par

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)),$$

avec pour tout n, $A_n = 2\displaystyle\int_0^1 y(x,0)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$ et $B_n = \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$.

Enfin, on donne l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \mathrm{ch}(x - \tfrac{1}{2})\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = -\frac{(1+\mathrm{e})\pi n((-1)^n - 1)}{2\sqrt{\mathrm{e}}(\pi^2 n^2 + 1)}$$