Corrigé du devoir 2

On considère une corde de longueur 1, fixée en ses extrémités, initialement au repos. On la soumet à une excitation dont l'intensité décroît au cours du temps. L'évolution de la hauteur $y(x,t)$ de la corde est décrite par l'équation

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \exp(-t).$$

Et les conditions aux bords se traduisent par : $\forall t,\ y(0,t) = y(1,t) = 0$.

1. On commence par chercher une solution particulière de l'équation (E).
   On pose $y_0(x,t) = f(x)\exp(-t)$. Montrer que y_0 est solution de l'équation si f est solution d'une équation différentielle à déterminer.

   On injecte y_0 dans l'équation :

   $$f(x)\exp(-t) = f''(x)\exp(-t) + \exp(-t).$$

   Elle est solution si $f(x) = f''(x) + 1$. Ainsi y_0 est solution si et seulement si f est solution de $f'' - f = -1$.

   On reconnaît une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on sait donc résoudre (même si ce n'est pas demandé). L'équation homogène associée est $f'' - f = 0$. Son polynôme caractéristique est $X^2 - 1$ de racines 1 et -1. Les solutions sont de la forme $\alpha\exp(x) + \beta\exp(-x)$. L'équation $f'' - f = -1$ a comme solution particulière évidente $f(x) = 1$.

   Ainsi, y_0 est solution si et seulement si f est de la forme $f(x) = 1 + \alpha\exp(x) + \beta\exp(-x)$.

2. Vérifier que la fonction $y_0(x) = \left(1 - \frac{\mathrm{ch}(x-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})}\right)\exp(-t)$ est une solution de (E) et qu'elle satisfait les conditions aux bords.

   On vérifie simplement que la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{\mathrm{ch}(x-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})}$ satisfait l'équation précédente :

   $$f''(x) - f(x) = -\frac{\mathrm{ch}(x-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})} - \left(1 - \frac{\mathrm{ch}(x-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})}\right) = -1.$$

   D'autre part, $f(0) = 1 - \frac{\mathrm{ch}(0-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})} = 1 - 1 = 0$ et $f(1) = 1 - \frac{\mathrm{ch}(1-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})} = 1 - 1 = 0$. Donc f et aussi y_0 satisfont les conditions aux bords.

3. On cherche maintenant la solution de notre problème sous la forme $y(x,t) = \tilde{y}(x,t) + y_0(x,t)$.
   Montrer que si y est solution du problème, alors $\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$.

   Calculons : $\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{y}_0}{\partial t^2}$. Comme y est supposée être solution de (E), on a $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \exp(-t)$, et on sait que y_0 est aussi solution de (E). On obtient

   $$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \exp(-t)\right) - \left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} + \exp(-t)\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}.$$

4. Notre solution doit satisfaire les conditions initiales : $\forall x,\ y(x,0) = 0$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$.

   En déduire les expressions de $\tilde{y}(x,0) = 0$ et $\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(x,0)$.

   On a
$$\tilde{y}(x,0) = y(x,0) - y_0(x,0) = 0 - \left(1 - \frac{\mathrm{ch}(x-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})}\right),$$
   et
$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial y_0}{\partial t}(x,0) = 0 - \left(-1 + \frac{\mathrm{ch}(x-\frac{1}{2})}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})}\right).$$

5. En déduire les expressions de $\tilde{y}(x,t)$ et de $y(x,t)$.

   On a montré que $\tilde{y}$ était solution du problème traité en cours. On en déduit que cette fonction est de la forme
$$\tilde{y}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)),$$
   avec pour tout n,
$$A_n = 2\int_0^1 \tilde{y}(x,0)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = 2\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} - \frac{(1+\mathrm{e})\pi n((-1)^n - 1)}{\mathrm{ch}(\frac{1}{2})\sqrt{\mathrm{e}}(\pi^2 n^2 + 1)},$$
   et
$$B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(x,0)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi} + \frac{(1+\mathrm{e})\pi n((-1)^n - 1)}{2\mathrm{ch}(\frac{1}{2})\sqrt{\mathrm{e}}(\pi^2 n^2 + 1)}\right).$$

On rappelle que si $y(x,t)$ satisfait $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et $\forall t,\ y(0,t) = y(1,t) = 0$, alors $y(x,t)$ est donnée par
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)(A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)),$$
avec pour tout n, $A_n = 2\displaystyle\int_0^1 y(x,0)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$ et $B_n = \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$.

Enfin, on donne l'intégrale suivante :
$$\int_0^1 \mathrm{ch}(x-\tfrac{1}{2})\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = -\frac{(1+\mathrm{e})\pi n((-1)^n - 1)}{2\sqrt{\mathrm{e}}(\pi^2 n^2 + 1)}$$