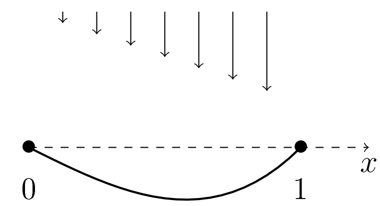
Devoir 2

Exercice 1 : corde vibrante



On considère une corde de longueur 1, fixée en ses extrémités, initialement au repos. On la soumet à un champ de force vertical dont l'intensité dépend de l'abscisse. Le bilan des forces appliqué à une portion de la corde permet d'établir l'équation des ondes modifiée :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x.$$

1. Déterminer la solution à l'équilibre de cette équation, c'est-à-dire la fonction $y_{eq}(x)$ ne dépendant pas de t, satisfaisant l'équation des ondes ci-dessus ainsi que les conditions aux bords.
2. Soit $y(x,t)$ la solution de notre problème. Montrer que la fonction $\tilde{y} = y - y_{eq}$ est solution du problème étudié en cours. On en déduit que $\tilde{y}$ est de la forme
$$\tilde{y}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x)(A_k \cos(\nu k\pi t) + B_k \sin(\nu k \pi t)).$$
3. Déduire des conditions initiales de notre solution y les expressions de $\tilde{y}(x,t)$ et $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}(x,0)$.
4. En déduire les valeurs des coefficients A_k et B_k puis l'expression de la solution y. On donne les intégrales ci-dessous :
$$\int_0^1 x\sin(k\pi x)dx = \tfrac{(-1)^{k+1}}{\pi k}, \quad \int_0^1 x^2 \sin(k\pi x)dx = \tfrac{(2-\pi^2k^2)(-1)^k-2}{\pi^3k^3}, \quad \int_0^1 x^3 \sin(k\pi x)dx = \tfrac{(6-\pi^2k^2)(-1)^k}{\pi^3k^3}.$$

Exercice 2 : équation de la chaleur

On considère une barre métallique de longueur 1 en contact en ses extrémités avec un milieu à 0°. L'équation de la chaleur est une équation de propagation analogue à l'équation des ondes :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

où $T(x,t)$ désigne la température en x à un instant t. Le but de cet exercice est de déterminer les solutions stationnaires du problème.

1. On cherche une solution de la forme $T(x,t) = U(x)V(t)$. L'injecter dans l'équation et en déduire que U et V sont solutions d'équations de la forme $U''(x) = \lambda U(x)$ et $V'(t) = c^2\lambda V(t)$.
2. Si on impose des conditions au bord comme pour le problème de la corde vibrante, on en déduit que λ est de la forme $\lambda = -k^2\pi^2$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ et $U(x) = \alpha \sin(k\pi x)$.
Représenter l'allure de la fonction U pour $k = 1$ et $k = 2$.
3. Résoudre l'équation satisfaite par V puis donner les solutions stationnaires du problème.
4. Comment évoluent ces solutions lorsque t tend vers $+\infty$? Évoluent-elles de la même manière pour $k = 1$ et $k = 2$?