Devoir 2

Exercice 1 : Corde vibrante (3 points)

On considère une corde de longueur $L=1$ fixée en ses extrémités $x=0$ et $x=1$. À l'instant $t=0$ elle est en position horizontale : $\forall x \in [0,1], \quad y(x,0)=0$ mais on lui a fourni une impulsion et sa vitesse initiale en chaque point est donnée par la fonction

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \cos(\pi x) - 1.$$

Déterminer l'expression de $y(x,t)$.

Rappel utile : $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(b+a) + \sin(b-a)\right)$.

Exercice 2 : Vibrations d'une membrane circulaire (7 points)

On considère une membrane circulaire de rayon 1 dont le bord est fixé. On étudie les vibrations verticales de cette membrane. L'objectif de cet exercice est de déterminer ses modes propres de vibration.

On note $z(x,y,t)$ la hauteur de la membrane au point (x,y) à l'instant t. Compte tenu de la forme de la membrane, nous allons plutôt travailler en coordonnées polaires et noter $z(r,\theta,t)$ cette fonction. Enfin, pour simplifier la résolution, nous ne considérerons que des vibrations invariantes par rotation (induites par exemple par une impulsion au centre de la membrane) et la hauteur sera simplement notée $z(r,t)$.

L'équation des ondes s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta z = \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}.$$

La condition au bord s'écrit $\forall t, \quad z(1,t) = 0$.

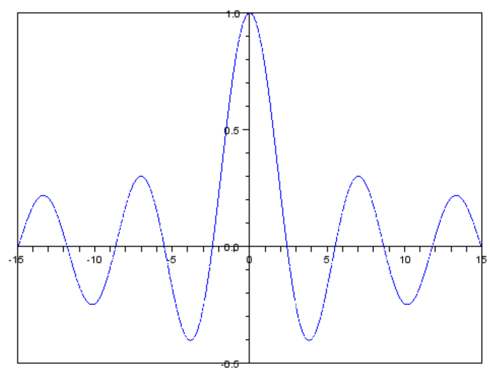
On cherche les solutions z de la forme $z(r,t) = U(r)V(t)$.

1. Injecter $z = UV$ dans l'équation des ondes et en déduire des équations différentielles satisfaites par U et V (en faisant apparaître une constante λ).

On ne sait pas résoudre explicitement l'équation satisfaite par U. On a introduit une nouvelle fonction J_0 qui est par définition solution d'une équation analogue (appelée équation de Bessel). On admet alors que les solutions de notre équation, définies en $r = 0$, sont les fonctions de la forme

$$U(r) = \alpha J_0(r\sqrt{-\lambda}), \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

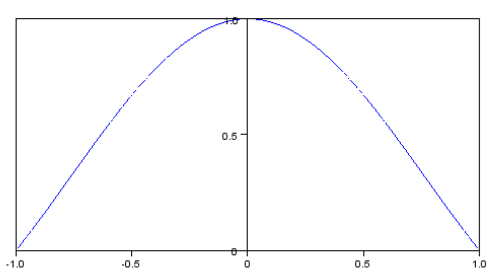
On sait déterminer numériquement les valeurs de J_0. Son graphe est ci-contre.

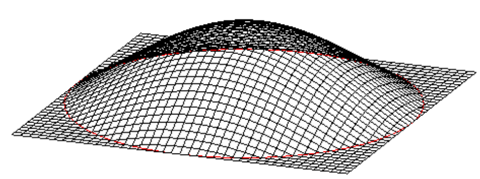


Graphe de J_0

2. En utilisant la condition au bord et ce graphe, déterminer (grossièrement) les trois premières valeurs possibles de λ.

   Avec la plus petite valeur possible de λ, on obtient le premier mode de vibration de la membrane. On représente ci-dessous $U_1(r) = J_0(r\sqrt{-\lambda_1})$, pour $-1 \leqslant r \leqslant 1$ et l'allure de la membrane correspondante.





3. Représenter de même le deuxième et le troisième mode de vibration de la membrane.
4. Résoudre l'équation satisfaite par V et donner les solutions stationnaires du problème.