

## CONTRÔLE 2

*Les documents et calculatrices sont interdits.*

*Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.*

1. On considère un problème de propagation d'ondes. L'équation ci-dessous est un modèle simplifié permettant de décrire le mouvement des vagues lorsque le fond est peu profond :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

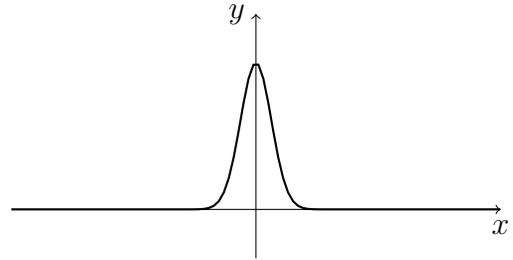
$y(x, t)$  représentant la hauteur de la vague en  $x$  à l'instant  $t$ . On ne considère pas de conditions au bord.

On cherche plus particulièrement les ondes qui se propagent sans se déformer. Il s'agit des solutions de l'équation de la forme  $y(x, t) = f(x - vt)$  où  $v$  représente la vitesse de propagation de l'onde.

- (a) Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Déterminer  $v$  tel que  $y_n(x, t) = \cos(n(x - vt))$  soit solution de l'équation.
- (b) Représenter les fonctions  $x \mapsto y_1(x, t)$  et  $x \mapsto y_2(x, t)$  pour  $t=0$  et  $t$  légèrement supérieur à 0.  
Décrire la propagation de l'onde en fonction de la fréquence  $n$  choisie.
- (c) On considère une vague initialement isolée de la forme ci-dessous. Elle se décompose (entre  $-\pi$  et  $\pi$ ) sous la forme d'une série de Fourier :

$$y(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Donner l'expression de la solution  $y(x, t)$  correspondante. Décrire l'évolution de la vague au cours du temps. Qu'appelle-t-on dispersion d'une onde ?



2. Le champ électrique se propageant dans une direction donnée satisfait l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

On s'intéresse de nouveau à la propagation des ondes et on cherche donc les solutions de la forme  $E(x, t) = f(x - vt)$ .

- (a) Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Déterminer les valeurs de  $v$  tel que  $y_n(x, t) = \cos(n(x - vt))$  soit solution de l'équation. Que vaut  $c$  ?
- (b) Représenter les fonctions  $y_1$  obtenues pour différentes valeurs de  $t$ .
- (c) On reprend l'exemple de la question 3 et on suppose que c'est la forme initiale de  $E$ . Comment va évoluer  $E$  au cours du temps ? Y a-t-il dispersion de l'onde ?