

# CONTRÔLE 1

*Les documents et calculatrices sont interdits.  
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.  
Barème donné à titre indicatif : 5-5.*

## Exercice 1

On considère un filtre linéaire qui, pour un signal d'entrée  $e(t)$  renvoie le signal de sortie  $s(t)$  satisfaisant l'équation différentielle :

$$s''(t) - 16s(t) = e'(t)$$

On suppose que le signal  $e(t)$  est une fonction  $2\pi$ -périodique de série de Fourier :  $e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ .

On cherche le signal de sortie correspondant, également  $2\pi$ -périodique, sous forme d'une série de Fourier :  $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{int}$ .

1. Injecter  $s(t)$  dans l'équation différentielle (en s'autorisant à dériver les séries sous le signe somme) et en déduire l'expression des coefficients  $d_n$  en fonction des coefficients  $c_n$ .

Dérivons terme à terme les séries de  $s$  et  $e$  et injectons :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n^2 d_n e^{int} - 16 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n c_n e^{int}.$$

Donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n^2 - 16) d_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n c_n e^{int}.$$

C'est une égalité entre deux séries de Fourier. Par unicité de la décomposition de Fourier, nous pouvons identifier leurs coefficients :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad (-n^2 - 16) d_n = i n c_n, \quad \text{donc} \quad d_n = -\frac{i n c_n}{n^2 + 16}.$$

2. On observe que ces coefficients  $d_n$  sont obtenus en atténuant les coefficients  $c_n$ . Que peut-on dire de cette atténuation lorsque  $n$  est proche de 0, ou lorsqu'il est très élevé ?

Les coefficients  $c_n$  sont multipliés par le facteur  $-\frac{in}{n^2+16}$  pour donner les coefficients  $d_n$ . Le module de ce facteur est  $\frac{|n|}{n^2+16}$ .

Il est nul pour  $n = 0$  et tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $\pm\infty$ . Ainsi l'atténuation est très forte pour les valeurs faibles de  $n$  et pour les valeurs très élevées.

3. Quelle fréquence du signal d'entrée  $e(t)$  est la mieux transmise au signal de sortie  $s(t)$  ? Comment se comporte le filtre ?

Cherchons le maximum de l'expression  $\frac{|n|}{n^2+16}$ . Dérivons :

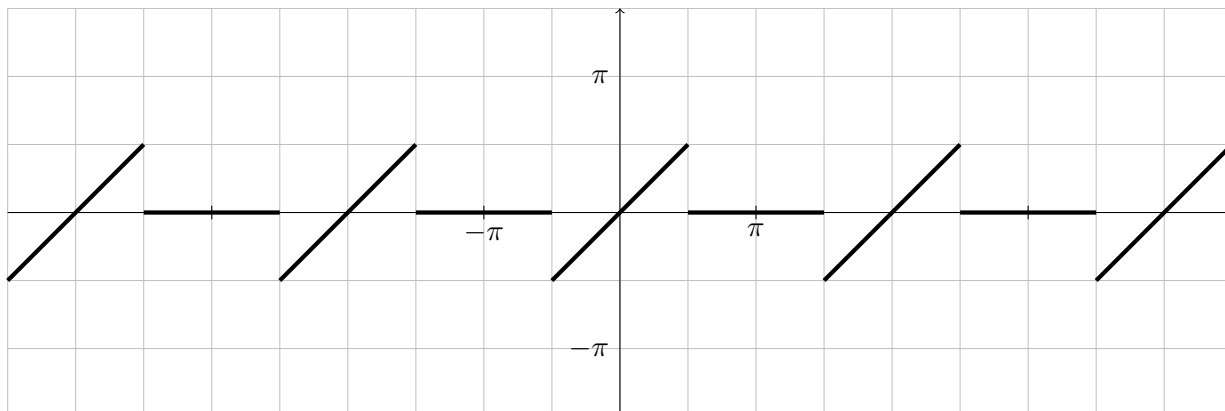
$$\left( \frac{n}{n^2+16} \right)' = \frac{n^2+16 - n(2n)}{(n^2+16)^2} = \frac{16-n^2}{(n^2+16)^2}.$$

Cette dérivée est nulle pour  $n = \pm 4$ . On peut vérifier que notre facteur  $\frac{|n|}{n^2+16}$  est bien maximal en ces deux valeurs.

C'est ainsi la quatrième fréquence de  $e$  qui est moins atténuée par le filtre. En conclusion, d'après la question précédente, le filtre coupe les très basses fréquences ainsi que les très hautes. Entre les deux, il laisse essentiellement passer les fréquences de  $e$  proches de la quatrième : c'est un filtre passe-bande.

## Exercice 2

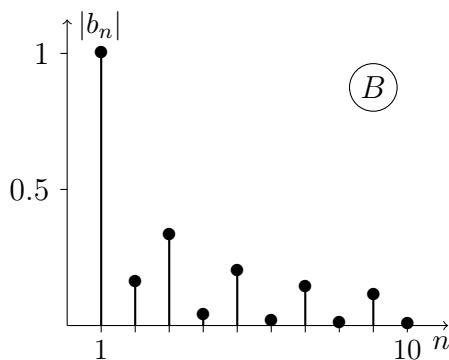
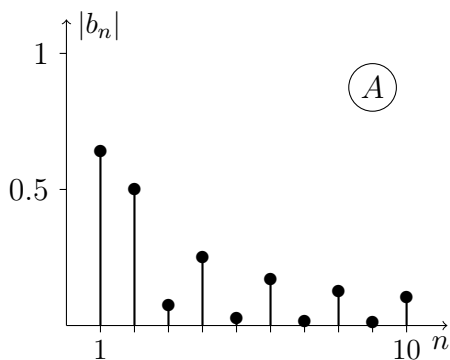
Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique impaire dont le graphe est donné ci-dessous.

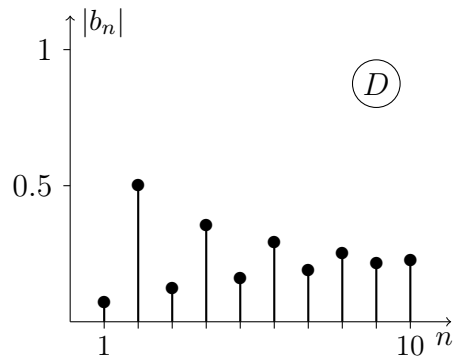
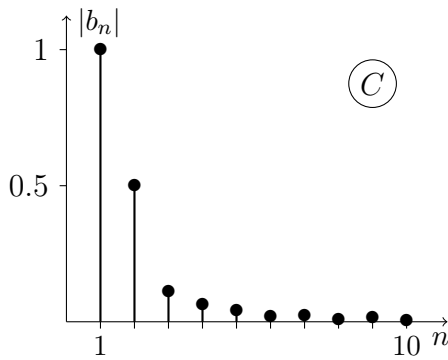


1. Calculer le coefficient de Fourier  $b_2$  de cette fonction.

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(2t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \sin(2t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{1}{2} t \cos(2t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(2t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \left[ \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2. Parmi les spectres ci-dessous, retrouver celui de  $f$ . Justifier ce choix avec plusieurs arguments.





D'après la question précédente, le coefficient  $b_2$  de  $f$  vaut  $\frac{1}{2}$ . Cela permet d'éliminer le spectre  $B$ .

Nous pourrions de même calculer d'autres coefficients de  $f$ . Par exemple, nous obtenons  $b_1 = \frac{2}{\pi} \approx \frac{2}{3}$ . Seul le spectre  $A$  convient alors.

Il est également possible d'analyser la répartition des fréquences des différents spectres et de les confronter au graphe de  $f$ .

La fonction  $f$  est discontinue. Ses coefficients ne devraient donc pas tendre vers 0 très rapidement ; la discontinuité "contient" des hautes fréquences non négligeables. Le spectre  $C$  ne semble ainsi pas convenir.

Au contraire, dans le spectre  $D$ , les hautes fréquences semblent excessivement importantes. La fonction  $f$  est dominée par un mouvement lent de période  $2\pi$ , alternant rampes et paliers constants. Les basses fréquences sont visiblement dominantes pour décrire  $f$ . Le spectre  $D$  avec son coefficient  $b_1$  trop faible et ses hautes fréquences trop fortes ne semble pas être le bon.

Si on n'a pas obtenu la valeur de  $b_2$ , il est plus subtil de distinguer les spectres  $A$  et  $B$ . On peut tout de même remarquer que dans le spectre  $B$ , la fréquence fondamentale  $b_1$  est très forte, tandis que le premier harmonique  $b_2$  est assez faible. Cela peut sembler étonnant pour  $f$ , car la demi-rampe (sur une demi-période) est plus naturellement approchée par une sinusoïde de fréquence double que par la fondamentale.

Le spectre  $A$  est bien le bon : les basses fréquences sont très présentes, mais les coefficients ne tendent pas très vite vers 0, les hautes fréquences, liées notamment à la discontinuité, sont visiblement présentes également.

*Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction  $f$   $2\pi$ -périodique sont donnés par*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad \text{et } \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

*La série de Fourier de  $f$  est alors donnée par*  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$