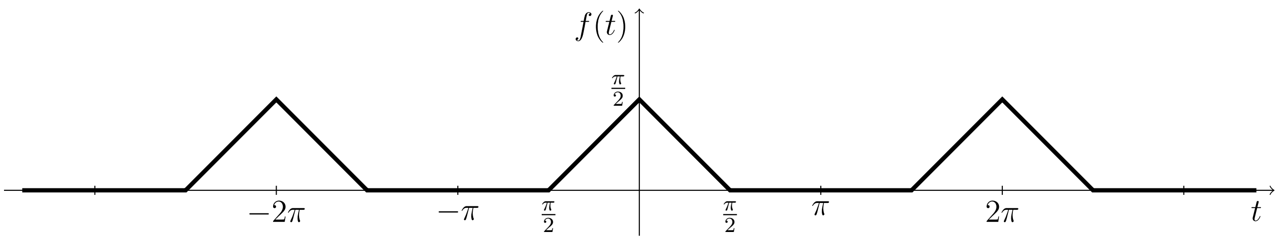
Fip GE3, Mathématiques 2 *février 2024*

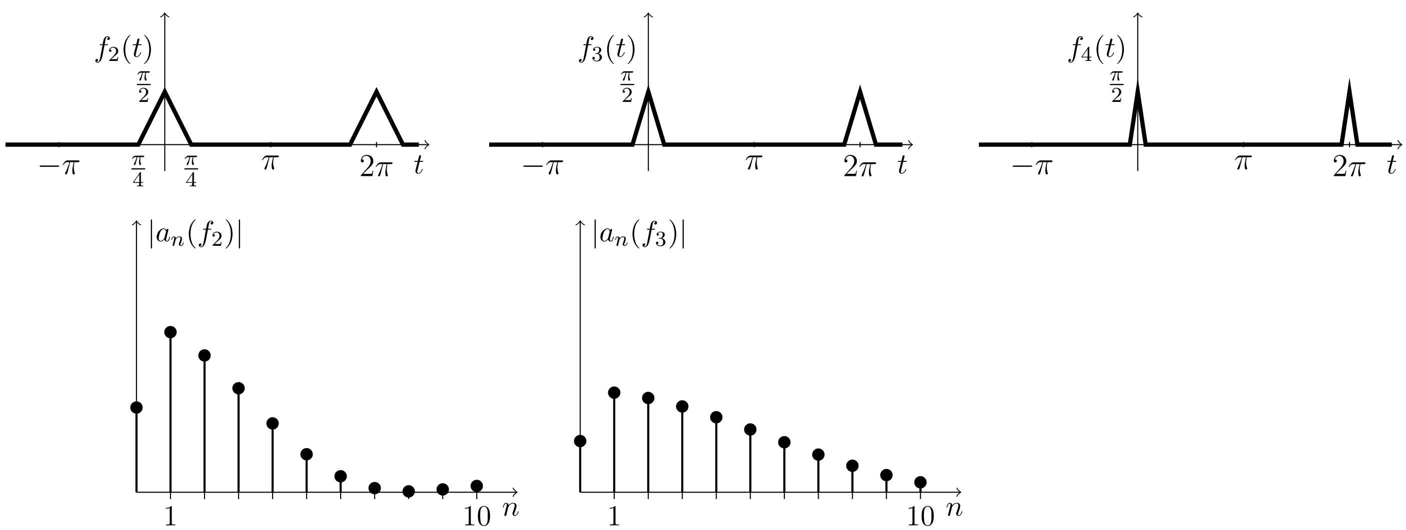
Contrôle 1

Exercice 1 On considère la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - t \text{ pour } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad f(t) = \frac{\pi}{2} + t \text{ pour } t \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \text{ sinon.}$$



1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f et écrire sa série de Fourier.
2. Représenter le graphe de $a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t)$.
3. Représenter les premiers coefficients du spectre de f. La convergence de la série est-elle rapide ? Faire le lien avec une propriété de f.
4. On considère les trois fonctions 2π-périodiques dont les graphes sont représentés ci-dessous. Nous avons également représenté les spectres de f_2 et f_3 en-dessous.
   Les commenter et les comparer, puis conjecturer l'allure du spectre de f_4.



Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

La série de Fourier de f est alors donnée par $\quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.-

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Estimer les coefficients de Fourier réels de la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous et écrire sa série de Fourier.
Indication : cette fonction g est la somme d'une constante et de trois fonctions sinusoïdales.