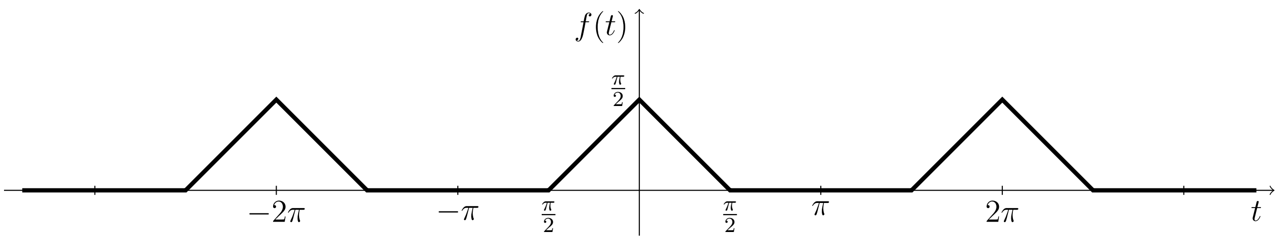
Contrôle 1

Exercice 1 On considère la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - t \text{ pour } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad f(t) = \frac{\pi}{2} + t \text{ pour } t \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \text{ sinon.}$$



1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f et écrire sa série de Fourier.

   La fonction f étant paire, ses coefficients b_n sont tous nuls.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\tfrac{\pi}{2} - t)\mathrm{d}t = \left[\tfrac{\pi}{2}t - \tfrac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

   Et pour $n \geqslant 1$:

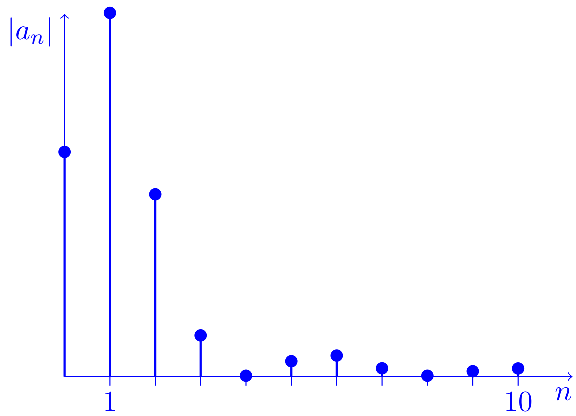
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\frac{\pi}{2} - t)\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad \text{en utilisant la parité de la fonction} \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n}\sin(nt)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\sin(n\pi/2)}{n} - \frac{\sin(n\pi/2)}{n} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2(1 - \cos(n\pi/2))}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

2. Représenter le graphe de $a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t)$.

   D'après nos calculs, la série de Fourier de f est

$$f(t) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1 - \cos(n\pi/2))}{\pi n^2}\cos(nt)$$

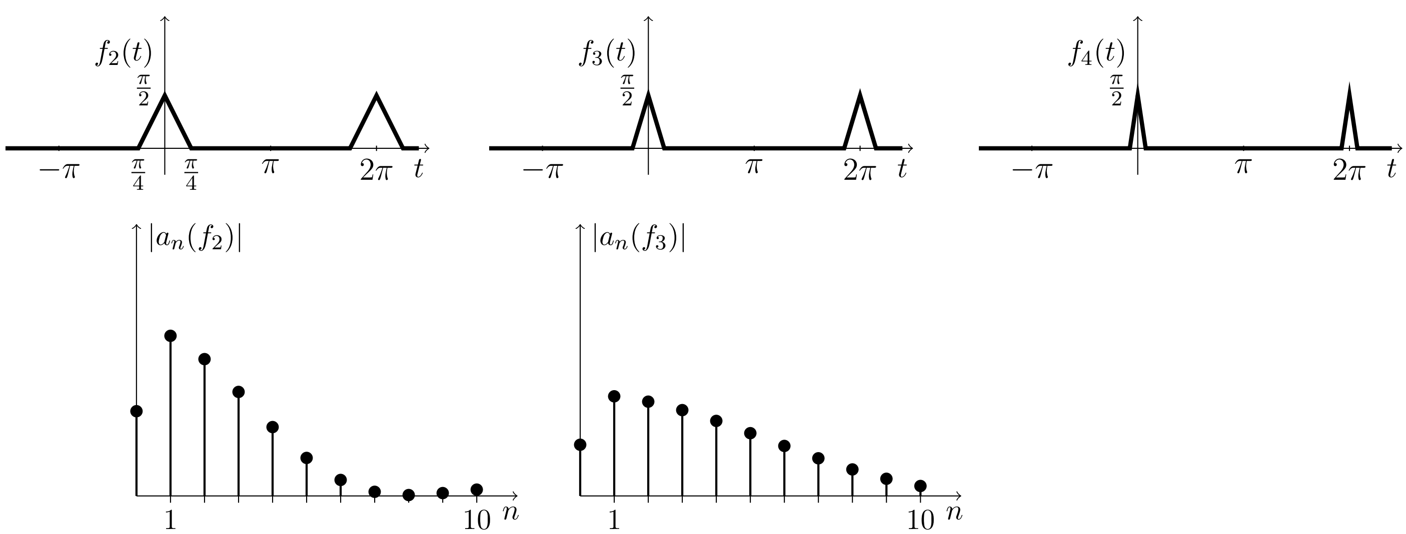
Les valeurs successives de $1 - \cos(n\pi/2)$ à partir de $n = 1$ sont : 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, ...
Voici l'allure de son spectre :



3. Représenter les premiers coefficients du spectre de f. La convergence de la série est-elle rapide ? Faire le lien avec une propriété de f.

   Les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 en $\frac{1}{n^2}$. La convergence n'est pas très rapide, ni très lente. Cela est lié au fait que f est une fonction continue, mais pas de classe C^1 : elle n'est pas dérivable en les points de la forme $k\pi$.

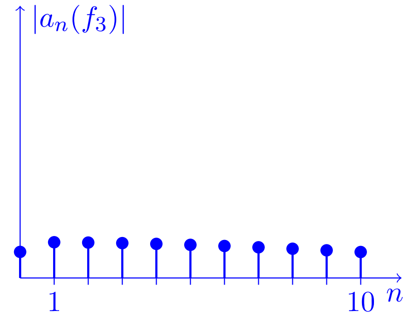
4. On considère les trois fonctions 2π-périodiques dont les graphes sont représentés ci-dessous. Nous avons également représenté les spectres de f_2 et f_3 en-dessous.
   Les commenter et les comparer, puis conjecturer l'allure du spectre de f_4.



Les fonctions sont toutes les trois analogues à la fonction f. Il s'agit à chaque fois d'un signal du type « triangle », ce triangle étant de plus en plus concentré autour d'une valeur.

Les spectres de f, f_1 et f_2 sont également analogues : les basses fréquences sont plus fortes que les hautes fréquence, on observe globalement une décroissance des coefficients. Mais dans le spectre de f_3, la part des basses fréquences baisse, et celle des hautes augmente. Ce même phénomène est observé entre les spectres de f_2 et f. Et globalement, la norme des coefficients a tendance à diminuer.

Nous pouvons conjecturer la même chose pour le spectre de f_4 : des coefficients de Fourier plus faibles globalement, avec des basses fréquences très légèrement plus élevées que les hautes, la décroissance des coefficients est plus lente que celle des précédentes fonctions.

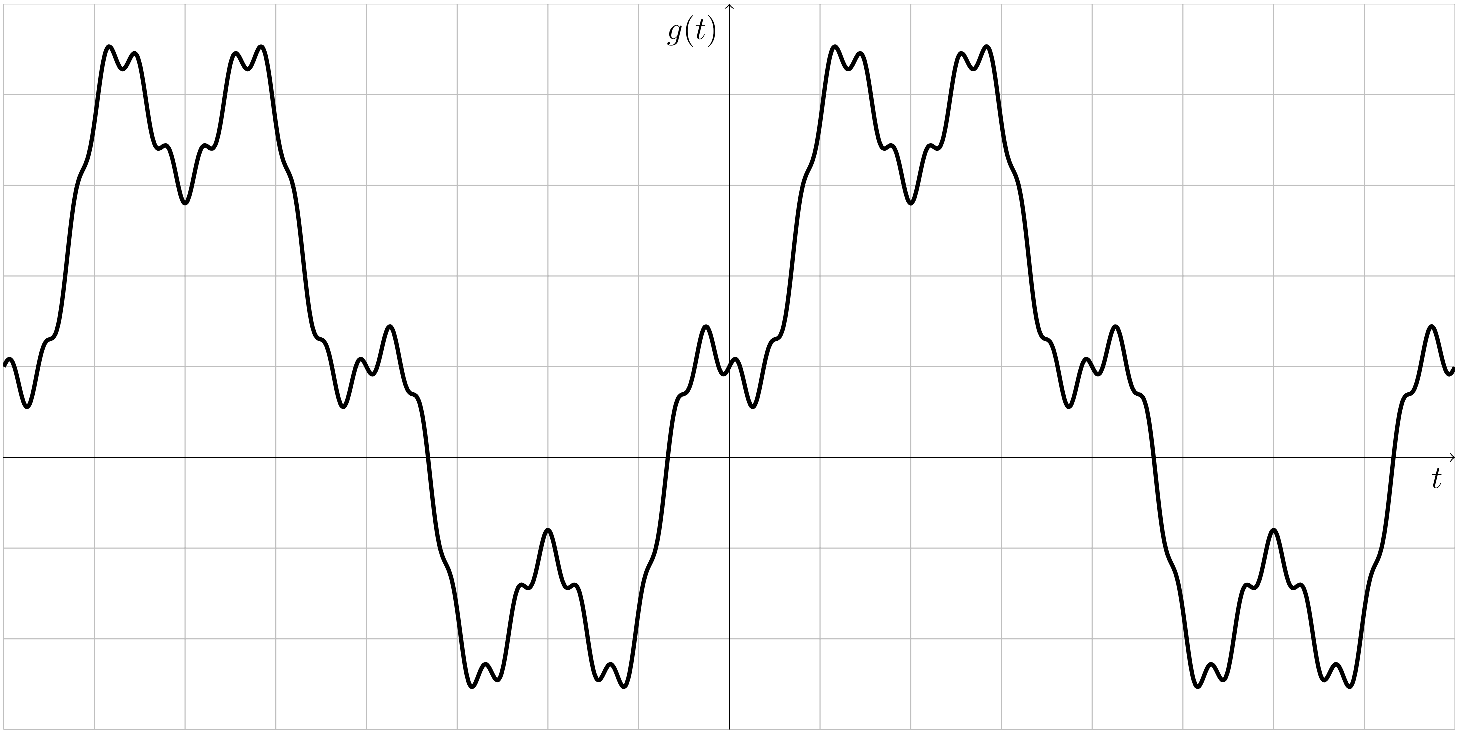


Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

La série de Fourier de f est alors donnée par $\displaystyle f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$.-

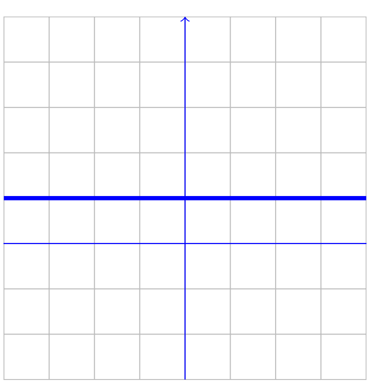
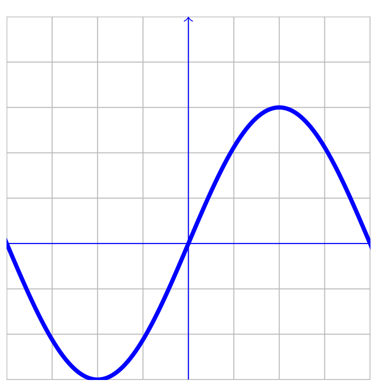
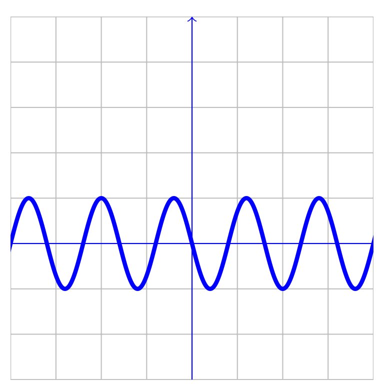
Exercice 2 Estimer les coefficients de Fourier réels de la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous et écrire sa série de Fourier.
Indication : cette fonction g est la somme d'une constante et de trois fonctions sinusoïdales.



En se basant sur les carreaux, la fonction g est 8-périodique.
Sa valeur moyenne est approximativement : $a_0 \approx 1$.
La fonction est impaire, il n'y aura que des sinus dans sa décomposition.
Nous observons une fondamentale très nette, avec une amplitude de l'ordre de 3, voire $3,5$.
S'ajoutent au moins deux termes de fréquences pus élevées : nous comptons 23 petites oscillations par période, de faible amplitude. Si nous les négligeons, nous voyons une oscillation 5 fois plus rapide que la fondamentale. Son amplitude se lit entre les abscisses 1 et 3 : elle est de l'ordre de 0,5 - 1.
Les petites oscillations ont elles une amplitude de l'ordre de 0,1 - 0,3.

La fonction représentée est la fonction suivante, cohérente avec nos estimations :

$$g(t) = 1 + 3\sin(\tfrac{2\pi}{8}t) - 1\sin(5\tfrac{2\pi}{8}t) + 0{,}2\sin(23\tfrac{2\pi}{8}t).$$


+

+

+