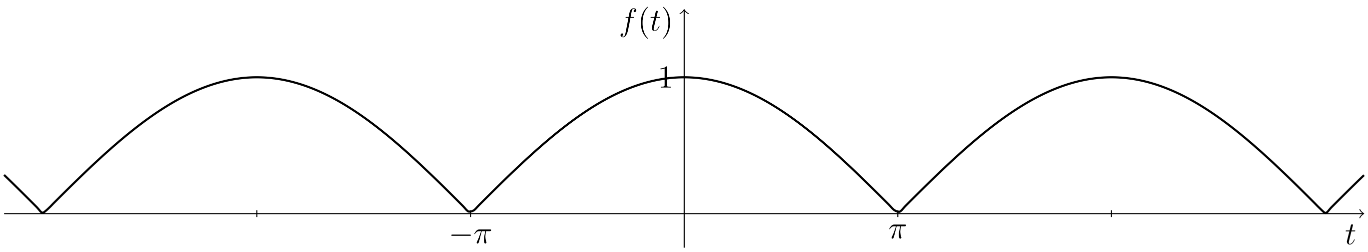
Contrôle 1

On considère la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(t) = \cos(\frac{t}{2})$.



1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

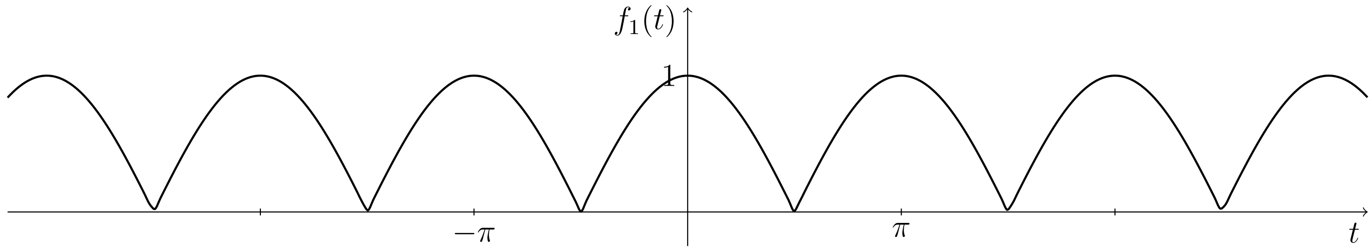
   Après simplification, on obtient pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)}$.
2. Écrire sa série de Fourier et représenter l'allure de son spectre.
3. La convergence de la série est-elle rapide ? Faire le lien avec une propriété de f.
4. Représenter le graphe de la dérivée f' de f. Déduire de la série de Fourier de f celle de f'. Peut-on toujours faire cela ?
5. On donne au verso les graphes de trois fonctions 2π-périodiques ainsi que de trois spectres. Associer à chacune son spectre en justifiant avec plusieurs arguments.

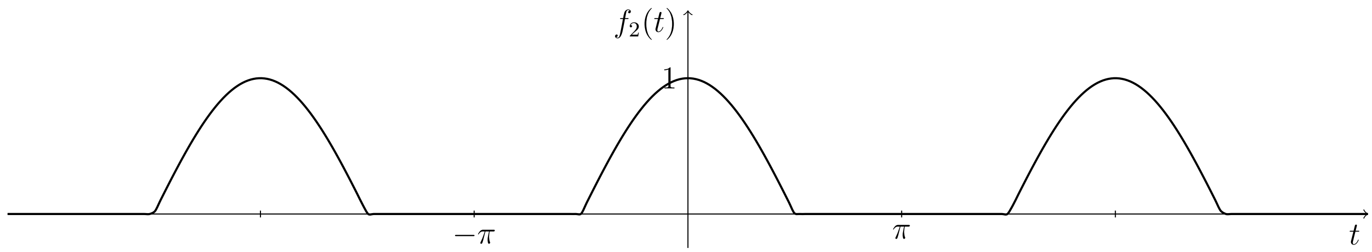
Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par

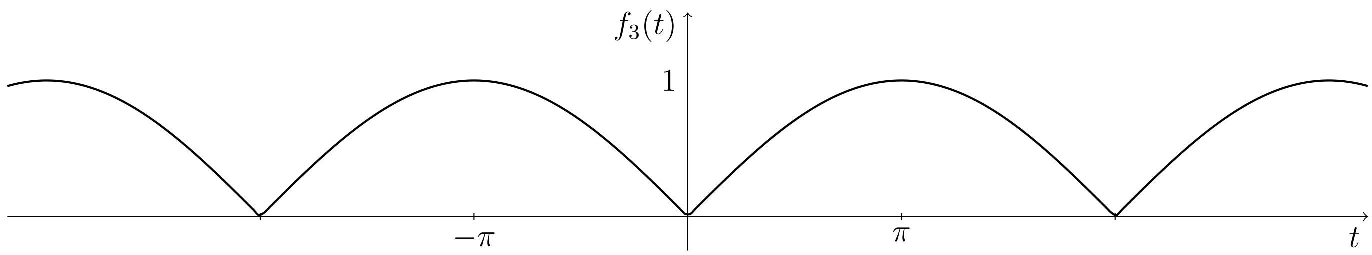
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

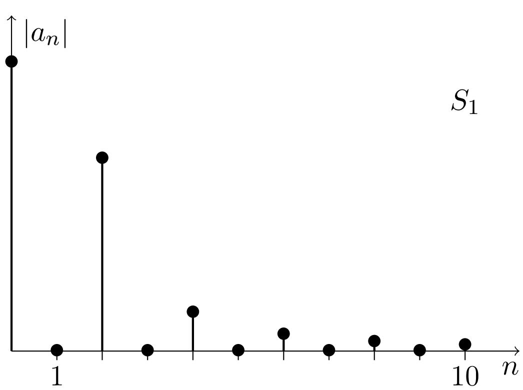
La série de Fourier de f est alors donnée par $f(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$.

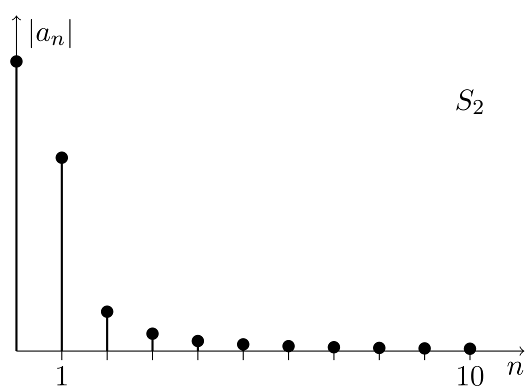
Trigonométrie : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$, $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b)$.

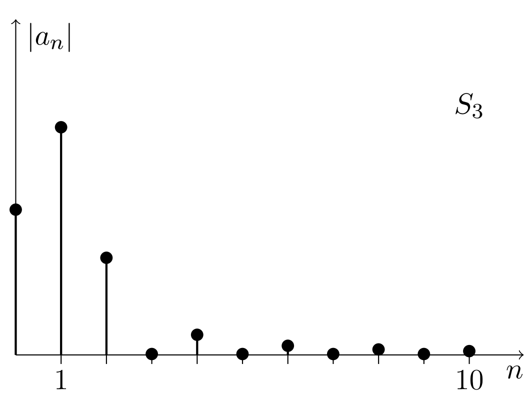

$f_1(t)$
1
$-\pi$
π
t


$f_2(t)$
1
$-\pi$
π
t


$f_3(t)$
1
$-\pi$
π
t


$|a_n|$
S_1
1
10
n


$|a_n|$
S_2
1
10
n


$|a_n|$
S_3
1
10
n