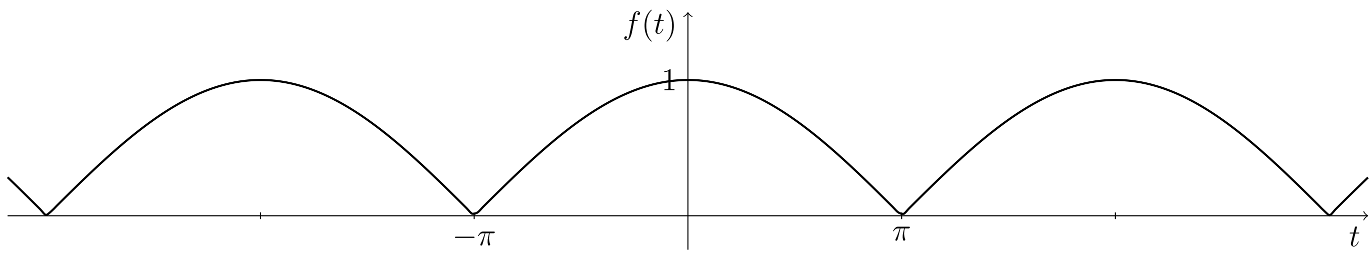
Contrôle 1

On considère la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(t) = \cos(\frac{t}{2})$.



1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

La fonction f est paire, donc ses coefficients b_n sont tous nuls.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{t}{2})\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{t}{2})\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\cos((n+\tfrac{1}{2})t) + \tfrac{1}{2}\cos((n-\tfrac{1}{2})t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-\frac{1}{2})t)}{n-\frac{1}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\frac{\sin((n-\frac{1}{2})\pi)}{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Or $\sin((n+\frac{1}{2})\pi) = 1$ si n est pair et vaut -1 si n est impair, donc $\sin((n+\frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$. Pour $\sin((n-\frac{1}{2})\pi)$, c'est le contraire, donc $\sin((n-\frac{1}{2})\pi) = -(-1)^n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{(-1)^n}{\pi(n^2-\frac{1}{4})}
\end{aligned}$$

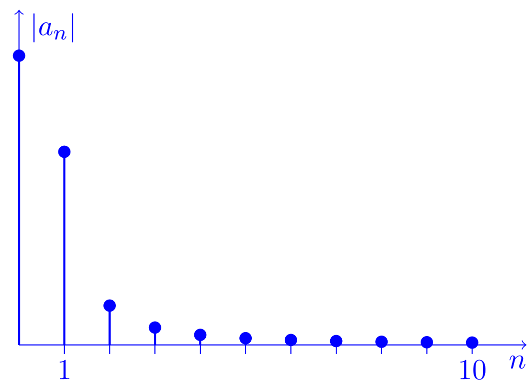
Après simplification, on obtient pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}$.

2. Écrire sa série de Fourier et représenter l'allure de son spectre.

D'après nos calculs, la série de Fourier de f est

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{\pi(n^2 - \frac{1}{4})} \cos(nt)$$

Voici l'allure de son spectre :

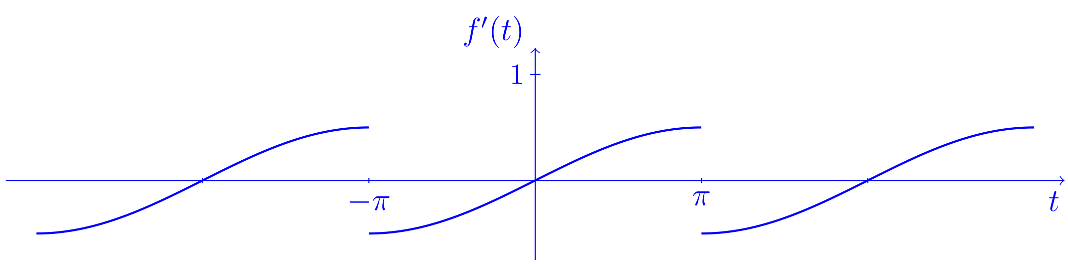


3. La convergence de la série est-elle rapide ? Faire le lien avec une propriété de f.

   Les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 en $\frac{1}{n^2}$. La convergence n'est pas très rapide, ni très lente. Cela est lié au fait que f est une fonction continue, mais pas de classe C^1 : elle n'est pas dérivable en les points de la forme $k\pi$.

4. Représenter le graphe de la dérivée f' de f. Déduire de la série de Fourier de f celle de f'. Peut-on toujours faire cela ?

   La dérivée f' est 2π-périodique et définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f'(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})$. Voici son graphe :



   Si on s'autorise à dériver sous le signe somme dans la série de Fourier de f, on obtient :

$$f'(t) = \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n^2 - \frac{1}{4})} \cos(nt) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\pi(n^2 - \frac{1}{4})} \sin(nt).$$

   Pour que cette opération soit possible, il faut au minimum que la série obtenue soit convergente. C'est bien le cas ici ; c'est lié au fait que f est continue partout et dérivable sur $]-\pi, \pi[$.

5. On donne au verso les graphes de trois fonctions 2π-périodiques ainsi que de trois spectres. Associer à chacune son spectre en justifiant avec plusieurs arguments.

   La fonction f_1 est identique à la fonction f étudiée mais avec une période deux fois plus petite. Autrement dit, sa fréquence est deux fois plus élevée. Son spectre aura les mêmes valeurs que celui de f, mais pour les fréquences deux fois plus élevées. Ainsi, vue comme une fonction périodique, f_1 aura une fréquence fondamentale nulle et de manière générale, toutes ses fréquences impaires seront nulle. Son spectre est le spectre S_1.

La fonction f_2 ressemble fortement à f_1 mais elle est nulle sur une moitié de la période. Première conséquence, sa valeur moyenne sera deux fois moins élevée que celle de f_1 (et que celle de f_3 également). L'alternance entre oscillations et valeurs nulle se traduit par une fondamentale relativement importante. Ensuite, ses oscillations identiques à celle de f_1 impliquent que son spectre aura la même allure que celui de f_1 pour les fréquences suivantes. Elles sont simplement deux fois plus faibles pour les mêmes raisons que la valeur moyenne. Son spectre est S_3.

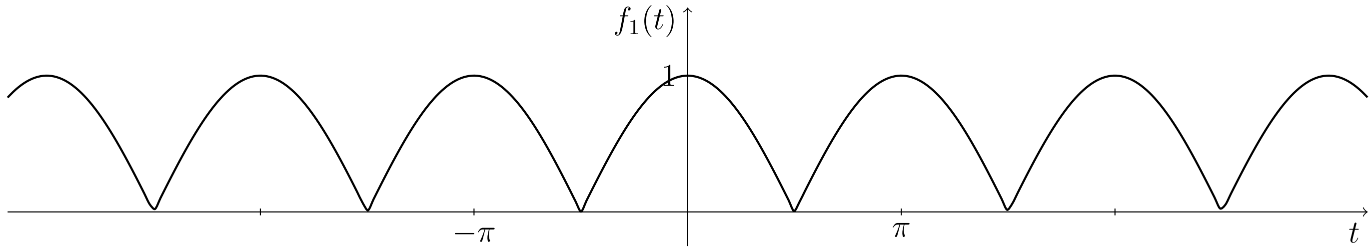
La fonction f_3 enfin est simplement la fonction f décalée de π. Les fréquences qui les composent sont donc les mêmes et leurs spectres seront identiques (en valeur absolue). D'après cela et les remarques précédentes sur f_1 et f_2, nous déduisons que son spectre est S_2.

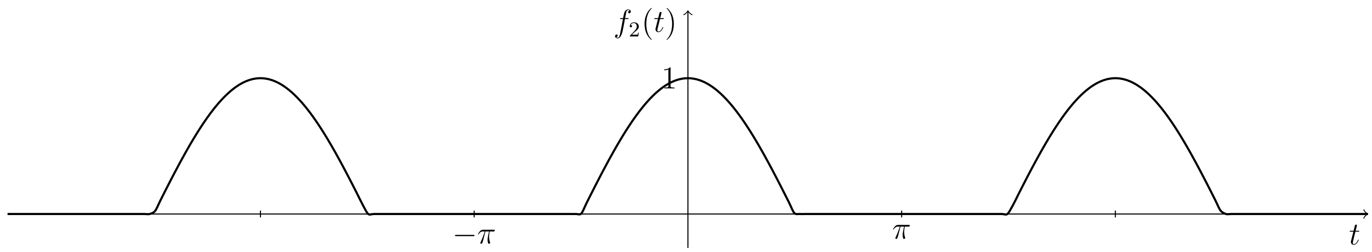
Rappels : les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont donnés par

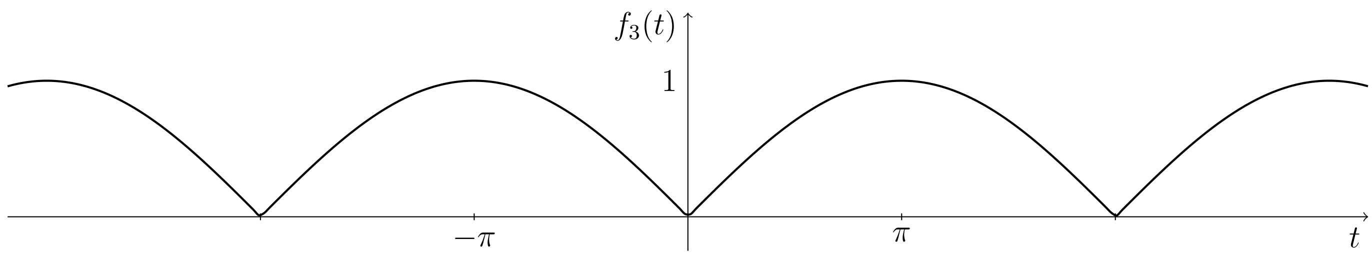
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

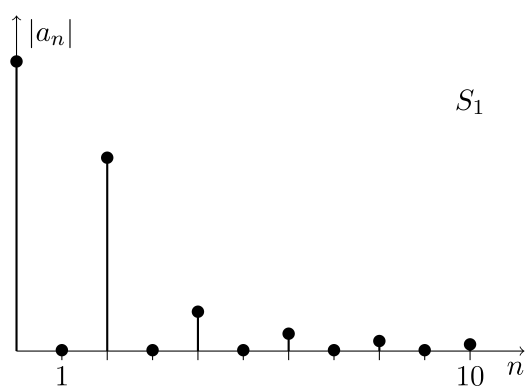
La série de Fourier de f est alors donnée par $f(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$.

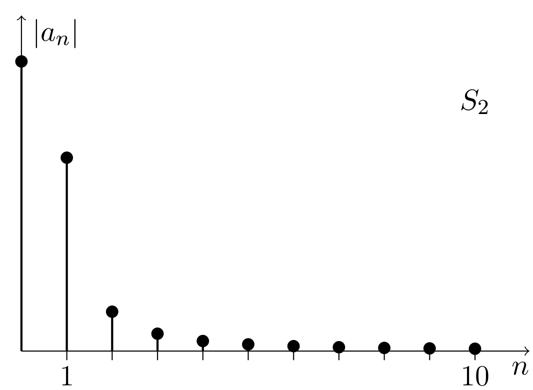
Trigonométrie : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$, $\quad \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b)$.

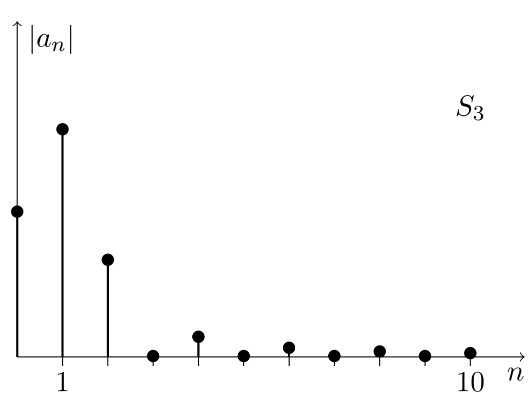

$f_1(t)$
1
$-\pi$
π
t


$f_2(t)$
1
$-\pi$
π
t


$f_3(t)$
1
$-\pi$
π
t


$|a_n|$
S_1
1
10
n


$|a_n|$
S_2
1
10
n


$|a_n|$
S_3
1
10
n