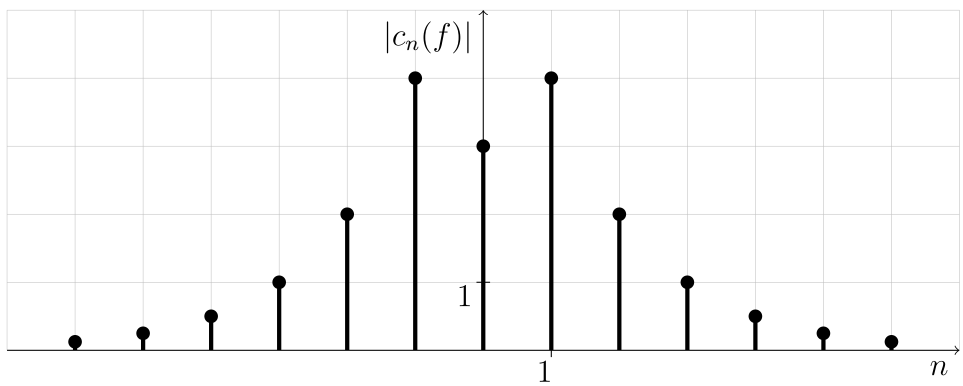
Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 15-5.

Exercice 1

Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$.
On décompose f en série de Fourier : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$.
La dérivée de f est également 2π-périodique et se décompose en série de Fourier :
$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{int}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $d_n = \mathrm{i}nc_n$.
2. Soit f la fonction dont le spectre est représenté ci-dessous (en module).



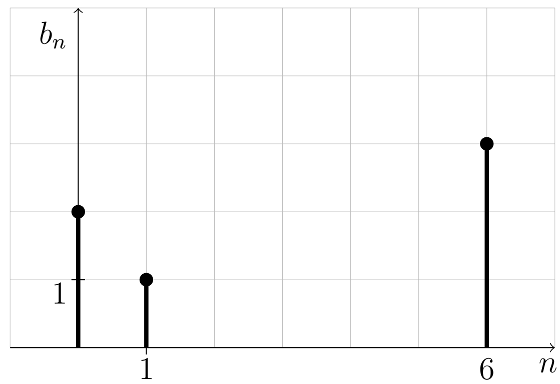
   Représenter l'allure du spectre de sa dérivée f'. Comment sont transformées les basses et les hautes fréquences de f lorsqu'on la dérive ? Proposer une explication.
3. On considère la fonction g 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $g(t) = t$. Calculer ses coefficients de Fourier complexes.
4. Quelle est la dérivée de g ? L'égalité établie dans la question 1 permet-elle de déterminer les coefficients de Fourier de g' ? Expliquer.
5. Soit h la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $h(t) = \frac{t^2}{2}$.
   À l'aide du résultat de la question 1, déterminer les coefficients de Fourier de h à partir des coefficients de Fourier de g.

Rappels : coefficients de Fourier complexes d'une fonction f 2π-périodique :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Représenter le graphe de la fonction T-périodique et impaire φ dont le spectre est donné ci-dessous.



On pourra le représenter sur la copie ou ci-dessous, en précisant bien les échelles en abscisse et en ordonnée. On justifiera brièvement comment ce graphe a été obtenu.