Fip GE3, Mathématiques 2 *mars 2022*

CONTRÔLE 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 15-5.

Exercice 1

Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$.
On décompose f en série de Fourier : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.
La dérivée de f est également 2π-périodique et se décompose en série de Fourier :
$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.

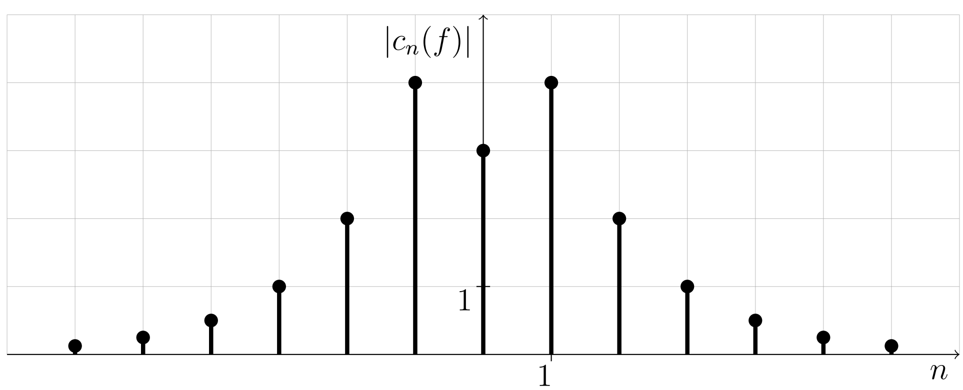
1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $d_n = \mathrm{i}nc_n$.

   On dérive la série de Fourier de f :

   $$f'(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \right)' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{i}n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

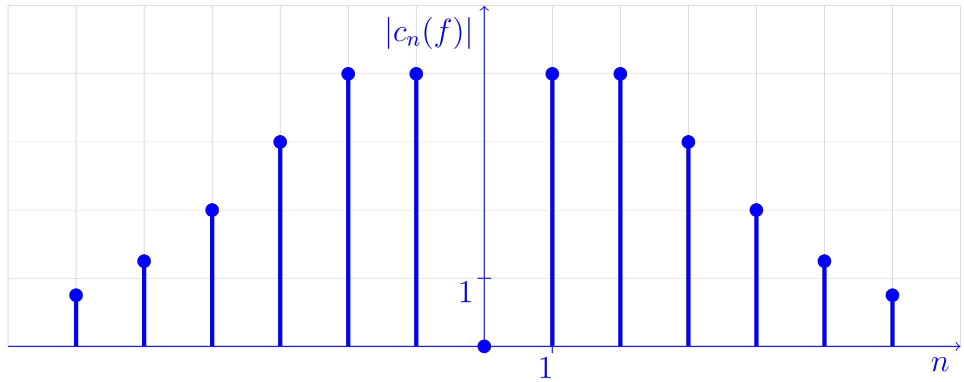
   On identifie les coefficients de cette nouvelle série de Fourier avec ceux de la série de f' et on obtient que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $d_n = \mathrm{i}nc_n$.

2. Soit f la fonction dont le spectre est représenté ci-dessous (en module).



   Représenter l'allure du spectre de sa dérivée f'. Comment sont transformées les basses et les hautes fréquences de f lorsqu'on la dérive ? Proposer une explication.

   On applique la formule précédente à ces coefficients : $d_0 = 0 \times c_0 = 0$, $|d_1| = |\mathrm{i}c_1| = |c_1|$, $|d_2| = |2\mathrm{i}c_2| = 2|c_2|$, etc.



On constate que, hormis le coefficient c_0, tous les coefficients de f sont amplifiés lorsqu'on dérive f. Et cette amplification est d'autant plus forte que n est grand : les hautes fréquences sont plus amplifiées que les basses.
On peut l'expliquer ainsi : les basses fréquences correspondent à des oscillations lentes ; leurs pentes sont faibles. La dérivée des termes à basse fréquence est donc faible également. Au contraire, les hautes fréquences correspondent à des oscillations rapides dont les pentes sont élevées ; leur dérivée a ainsi une forte amplitude. Concrètement, on constate simplement que la dérivée de $\sin(nt)$ est $n\cos(nt)$, son amplitude est n.

3. On considère la fonction g 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $g(t)=t$. Calculer ses coefficients de Fourier complexes.

   Calculons d'abord c_0. C'est la valeur moyenne de g. Comme g est une fonction impaire, sa moyenne est nulle : $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{d}t = 0$.

   Soit $n \neq 0$. Alors, en utilisant une intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[t\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi(-1)^n+\pi(-1)^n}{-\mathrm{i}n} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

4. Quelle est la dérivée de g ? L'égalité établie dans la question 1 permet-elle de déterminer les coefficients de Fourier de g' ? Expliquer.

   La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ sauf en les points de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbf{Z}$. Là où elle est dérivable, sa dérivée vaut $g'(t)=1$.
   La fonction g n'étant pas continue, on ne peut a priori pas appliquer l'égalité de la question 1. Voyons si l'hypothèse de continuité de f dans l'énoncé est bien importante.
   Si on applique la formule à g, on obtient que les coefficients de g' sont donnés par : $d_n = inc_n = -(-1)^n$ et $d_0 = 0$. Ces coefficients de Fourier ne convergent pas vers 0 quand n tend vers l'infini, ce n'est pas normal. D'autre part, la fonction g' est constante, ses coefficients de Fourier devraient être : $d_0 = 1$ et $d_n = 0$ pour $n \neq 0$. La formule ne fonctionne donc pas dans ce cas.

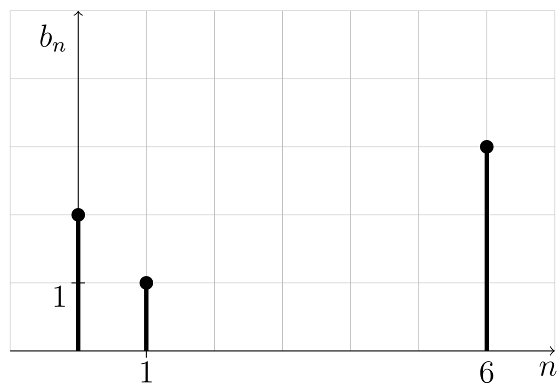
5. Soit h la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $h(t) = \frac{t^2}{2}$.
   À l'aide du résultat de la question 1, déterminer les coefficients de Fourier de h à partir des coefficients de Fourier de g.

   La fonction h est cette fois-ci bien continue et C^1 par morceaux. Sa dérivée est g. D'après la formule de la question 1, ses coefficients sont donnés par : $c_n(g) = \mathrm{i}nc_n(h)$, donc $c_n(h) = \frac{c_n(g)}{\mathrm{i}n} = \frac{(-1)^n}{n^2}$.
   Attention, il faut traiter le cas $n = 0$ à part. Pour celui-ci, la formule ne donne rien, il faut calculer :
$$c_0(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^2}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{6}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

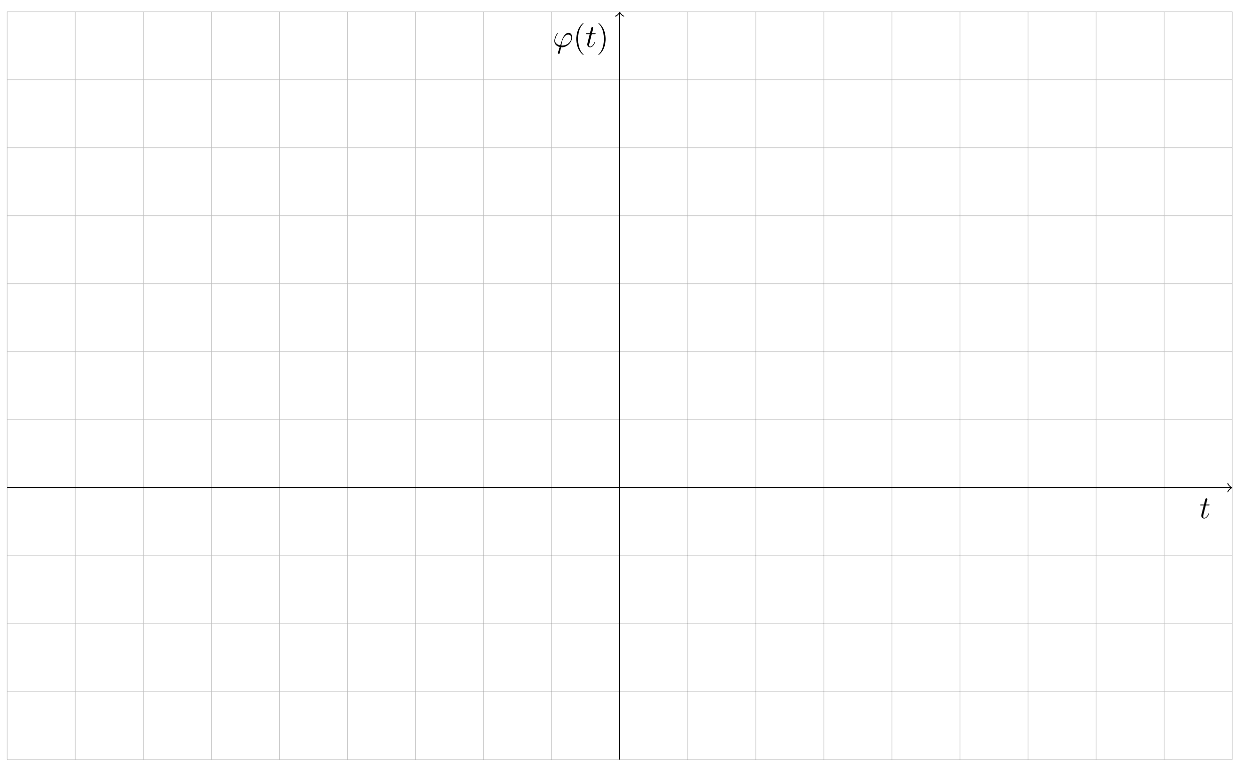
Rappels : coefficients de Fourier complexes d'une fonction f 2π-périodique :
$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Représenter le graphe de la fonction T-périodique et impaire φ dont le spectre est donné ci-dessous.



On pourra le représenter sur la copie ou ci-dessous, en précisant bien les échelles en abscisse et en ordonnée. On justifiera brièvement comment ce graphe a été obtenu.

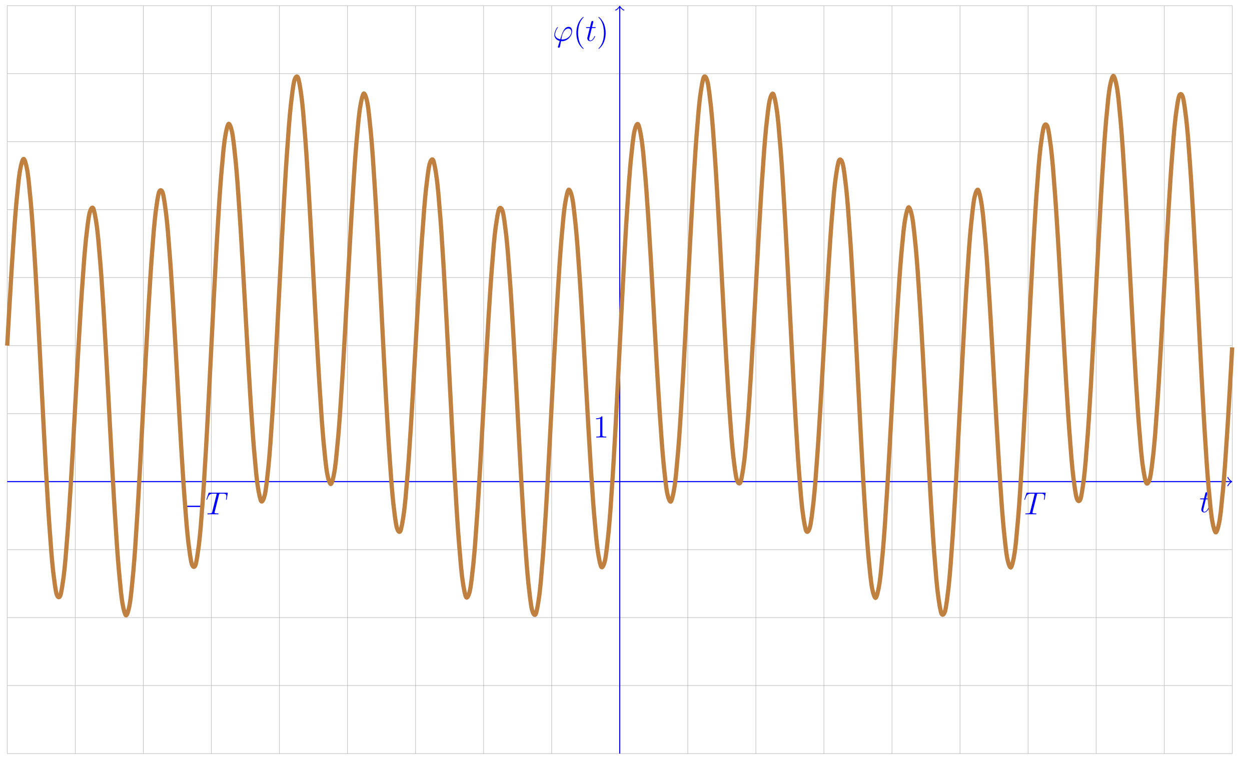


La série de Fourier de φ est, d'après son spectre :

$$\varphi(t) = 2 + \sin(\tfrac{2\pi}{T}t) + 3\sin(6\tfrac{2\pi}{T}t).$$

Sa valeur moyenne est donc 2, elle possède une fréquence fondamentale d'amplitude faible par rapport à sa haute fréquence qui oscille 6 fois par période.

Pour obtenir un graphe assez précis, on représente les graphes des fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto 3\sin(6t)$, on les additionne, on adapte l'échelle en abscisse pour que la période soit T et enfin on n'oublie pas d'ajouter la valeur moyenne. On obtient ainsi un graphe s'approchant au mieux de celui-ci :



$\varphi(t)$
1
$-T$
T
t