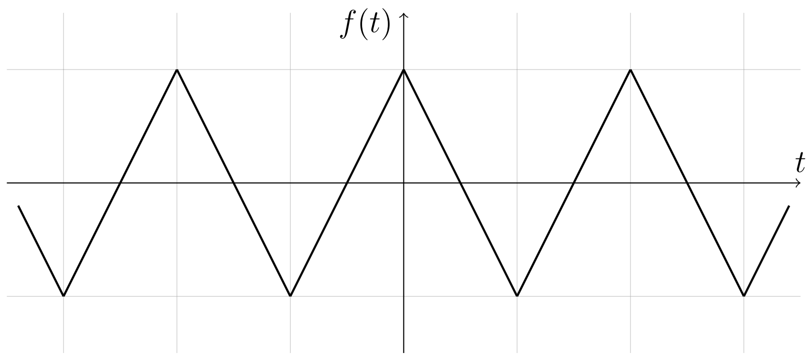
Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 **13 pts**

Soit f la fonction 2-périodique définie sur $[0,1]$ par $f(t) = 1 - 2t$ et sur $[-1,0]$ par $f(t) = 1 + 2t$. On représente son graphe ci-dessous.



1. Que vaut le coefficient a_0 de f ?
2. Calculer et représenter la dérivée f' de f (là où elle est définie).
3. Calculer la série de Fourier de f'.
4. En déduire, en intégrant cette série, la série de Fourier de f.
5. Représenter sur le graphe de f son approximation par $a_0 + a_1 \cos(\pi t)$.

   On considère maintenant la fonction 2-périodique g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = t - t^2$ et sur $[-1,0]$ par $g(t) = t + t^2$.
6. Représenter le graphe de g. *Indication : on reconnaîtra des polynômes de degré 2 dont les racines sont évidentes.*
7. Quelle relation y a-t-il entre g et f ? En déduire simplement la série de Fourier de g.
8. Représenter sur le même graphe l'approximation de g par les premiers termes de sa série de Fourier : $a_0 + b_1 \sin(\pi t)$.
9. Estimer les coefficients b_2 et b_3 de g. Quelle différence observe-t-on entre les coefficients de Fourier de g, f et f' ? Expliquer cela en comparant certaines propriétés de ces fonctions.

Rappels : coefficients de Fourier d'une fonction f T-périodique :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t.$$

Série de Fourier de f : $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$.

Exercice 2 **7 pts**

On donne ci-dessous cinq fonctions 4-périodiques impaires à gauche et cinq spectres de Fourier à droite.

Décrire chacune des fonctions et retrouver le spectre qui lui correspond. Toutes les réponses doivent être justifiées.