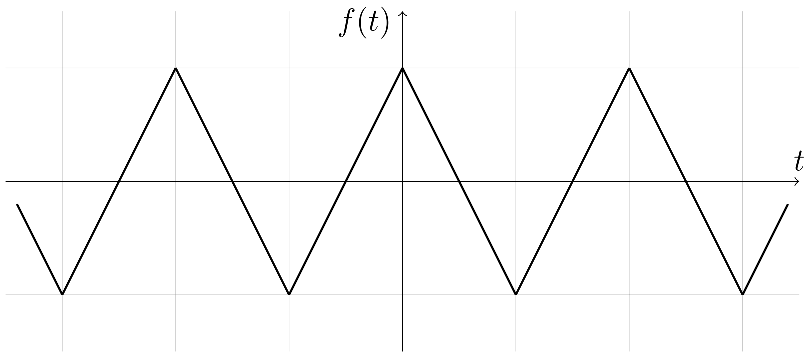
Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.

Exercice 1 13 pts

Soit f la fonction 2-périodique définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = 1 - 2t$ et sur $[-1, 0]$ par $f(t) = 1 + 2t$. On représente son graphe ci-dessous.



1. Que vaut le coefficient a_0 de f ?

   Graphiquement, on voit que la valeur moyenne de f est nulle. Donc $a_0 = 0$.

2. Calculer et représenter la dérivée f' de f (là où elle est définie).

   La dérivée de f est 2-périodique. Elle est donnée par $f'(t) = -2$ sur $]0, 1[$ et $f'(t) = 2$ sur $]-1, 0[$. C'est une fonction créneau.

3. Calculer la série de Fourier de f'.

   La fonction f' est une fonction impaire. Donc ses coefficients a_0 et a_n sont nuls. Calculons ses coefficients b_n :

$$b_n(f') = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f'(t)\sin(n\frac{2\pi}{2}t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} -2\sin(n\pi t)\mathrm{d}t = 4\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}.$$

   La série de Fourier de f' est ainsi

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\sin(n\pi t).$$

4. En déduire, en intégrant cette série, la série de Fourier de f.

   On admet qu'on peut intégrer terme à terme la série ci-dessus. On obtient

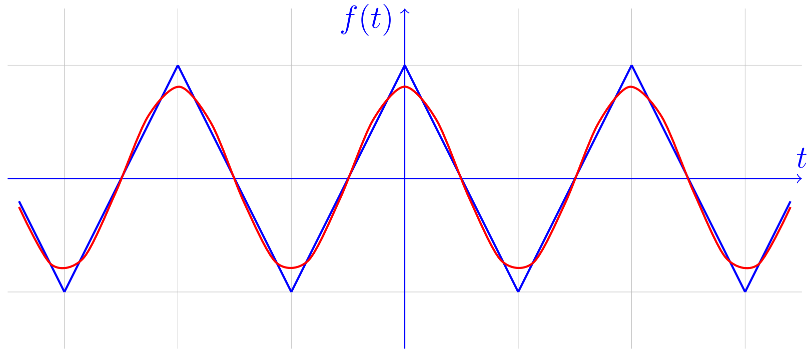
$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -4\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} + c.$$

   La constante d'intégration correspond à la valeur moyenne de f qui est nulle. Donc la série de Fourier de f serait

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -4\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t).$$

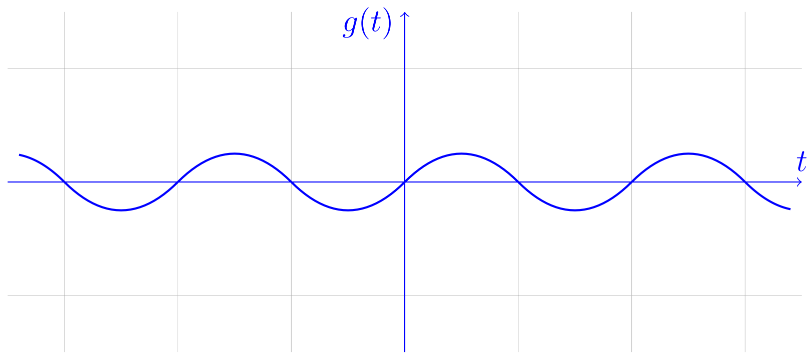
5. Représenter sur le graphe de f son approximation par $a_0 + a_1 \cos(\pi t)$.

On a obtenu $a_0 = 0$ et $a_1 = -4\frac{(-1)^1-1}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2} \approx -0,8$.



On considère maintenant la fonction 2-périodique g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = t - t^2$ et sur $[-1,0]$ par $g(t) = t + t^2$.

6. Représenter le graphe de g. *Indication : on reconnaîtra des polynômes de degré 2 dont les racines sont évidentes.*



7. Quelle relation y a-t-il entre g et f ? En déduire simplement la série de Fourier de g.

On remarque que $g' = f$. On peut de nouveau essayer d'obtenir la série de Fourier de g en intégrant celle de f :

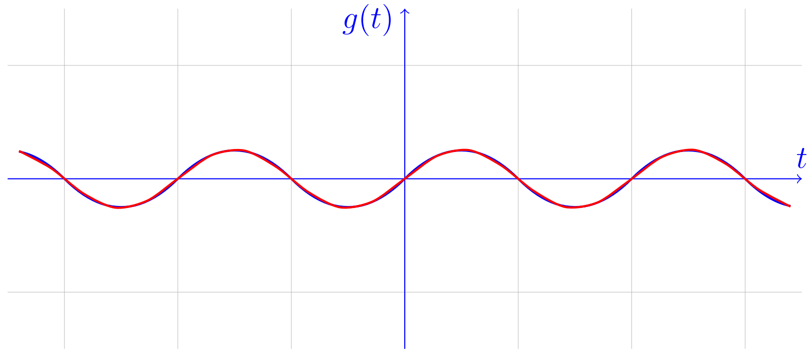
$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -4\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} + d.$$

La constante d'intégration d est encore donnée par la valeur moyenne de g. Celle-ci est graphiquement clairement nulle. On conclut :

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -4\frac{(-1)^n - 1}{n^3\pi^3}\sin(n\pi t).$$

8. Représenter sur le même graphe l'approximation de g par les premiers termes de sa série de Fourier : $a_0 + b_1 \sin(\pi t)$.

On a obtenu $a_0(g) = 0$ et $b_1(g) = \frac{8}{\pi^3}$. On obtient le graphe suivant.



Les graphiques semblent confondus, l'approximation est très bonne avec seulement un terme de la série de Fourier de g.

9. Estimer les coefficients b_2 et b_3 de g. Quelle différence observe-t-on entre les coefficients de Fourier de g, f et f' ? Expliquer cela en comparant certaines propriétés de ces fonctions.

   On obtient $b_2(g) = 0$, $b_3(g) = \frac{8}{27\pi^3}$. Les coefficients de g tendent plus vite vers 0 (en $\frac{1}{n^3}$) que ceux de f (en $\frac{1}{n^2}$). Cela explique qu'on obtienne une meilleure approximation de g avec peu de coefficients que pour f. Et c'est directement lié à la meilleure régularité de g : la fonction g est de classe C^1 tandis que la fonction f n'est que continue.

Rappels : coefficients de Fourier d'une fonction f T-périodique :

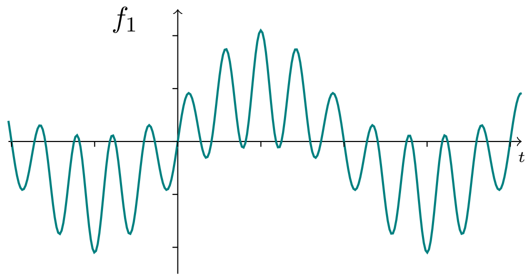
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t.$$

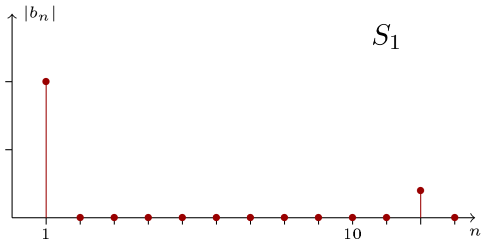
Série de Fourier de f : $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$.

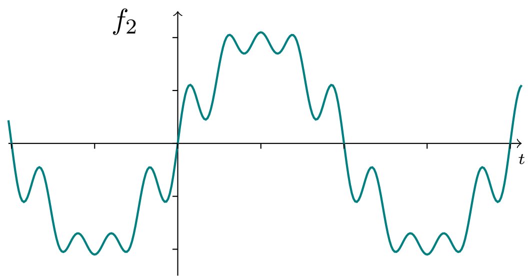
Exercice 2 **7 pts**

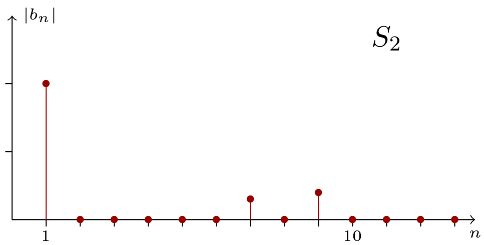
On donne ci-dessous cinq fonctions 4-périodiques impaires à gauche et cinq spectres de Fourier à droite.

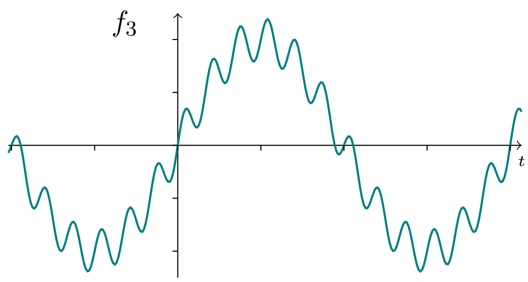
Décrire chacune des fonctions et retrouver le spectre qui lui correspond. Toutes les réponses doivent être justifiées.

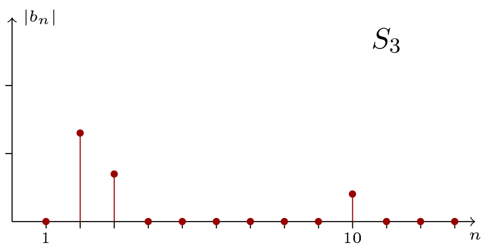


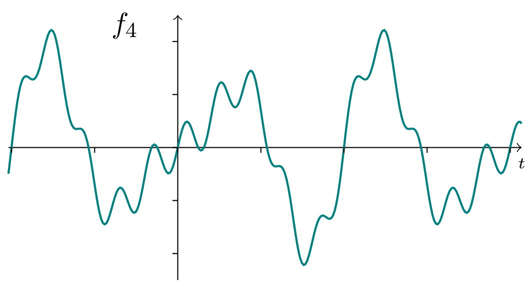


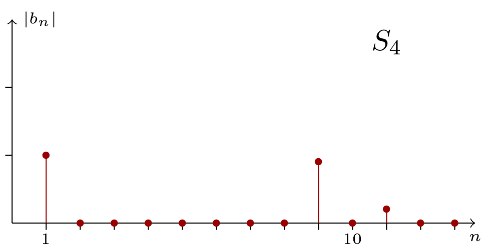


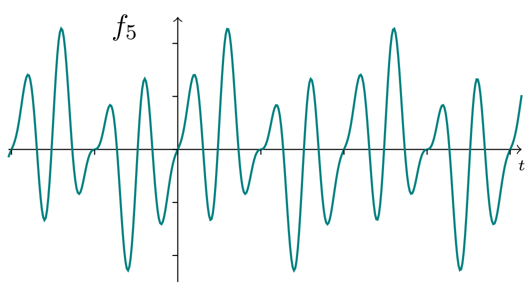


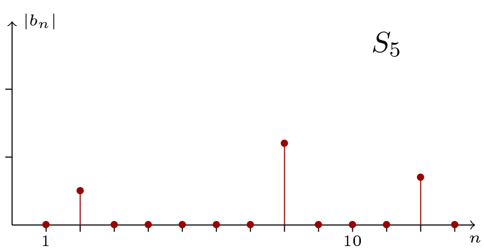












Commençons par décrire succinctement les 5 signaux. Le signal f_1 est visiblement constitué d'une basse fréquence moyenne (d'amplitude de l'ordre de 1) et d'une haute fréquence d'intensité comparable.

Le signal f_2 est constitué d'une basse fréquence plus importante (d'amplitude de l'ordre de 2) et de hautes fréquences faibles. Notons aussi qu'il y a moins d'oscillations que dans el signal précédent, ces hautes fréquences devraient être moins élevées que la haute fréquence de f_1.

Le signal f_3 est constitué d'une basse fréquence forte et d'une haute fréquence faible. On peut même préciser cette fréquence : il y a 12 oscillations par période.

Le signal f_4 semble plus complexe que les précédents. La fréquence fondamentale n'apparaît pas aussi clairement.

Dans le signal f_5, ce sont les hautes fréquences qui sont les plus visibles et il n'est pas évident de préciser les basses fréquences qui composent ce signal.

Pour choisir les bons spectres, regardons d'abord les signaux les plus simples : f_1 et f_3 semblent constitués d'une basse fréquence et d'une haute fréquence dont on peut estimer facilement les amplitudes. Avec sa basse et sa haute fréquence d'amplitudes de l'ordre de 1, le signal f_1 a pour spectre S_4.

Avec sa basse fréquence forte et sa haute fréquence fable, f_3 a pour spectre S_1.

Parmi f_2, f_4 et f_5, le signal f_2 est le seul à avoir une fréquence fondamentale très visible et d'amplitude élevée. Il reste le spectre S_2 avec ce profil. On y trouve deux hautes fréquences faibles qui complexifient l'allure de f_2.

Restent les spectres S_3 et S_5. Dans le premier, les basses fréquences sont plus importante que l'unique haute fréquence ; dans le second ce sont les hautes fréquences qui prédominent. Ils ont en commun d'avoir une fréquence fondamentale nulle. Le spectre S_3 est celui de f_4 et S_5 est celui de f_5.