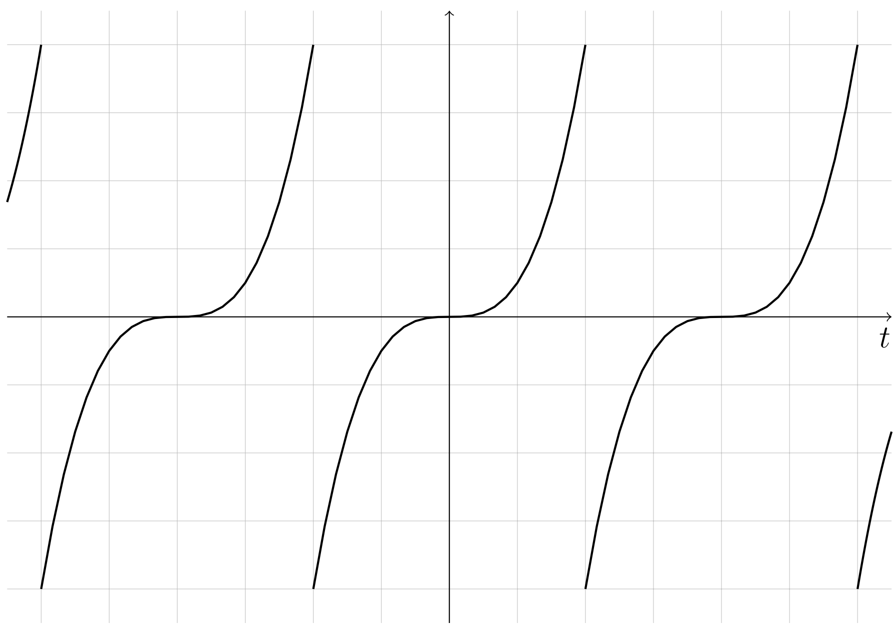
Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 6-3-3.

Exercice 1

Soit f la fonction 4-périodique définie sur $]-2,2[$ par $f(t)=\frac{t^3}{2}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de f et donner sa série de Fourier.
2. Quel est l'ordre de grandeur des coefficients lorsque n tend vers $+\infty$? Commenter.
3. Donner des valeurs approchées des coefficients b_1 et b_2.
   Représenter sur le graphe ci-dessous les fonctions $S_1 : t \mapsto b_1 \sin(\frac{\pi}{2}t)$
   et $S_2 : t \mapsto b_1 \sin(\frac{\pi}{2}t) + b_2 \sin(2\cdot\frac{\pi}{2}t)$.



Rappels : coefficients de Fourier d'une fonction f T-périodique :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t.$$

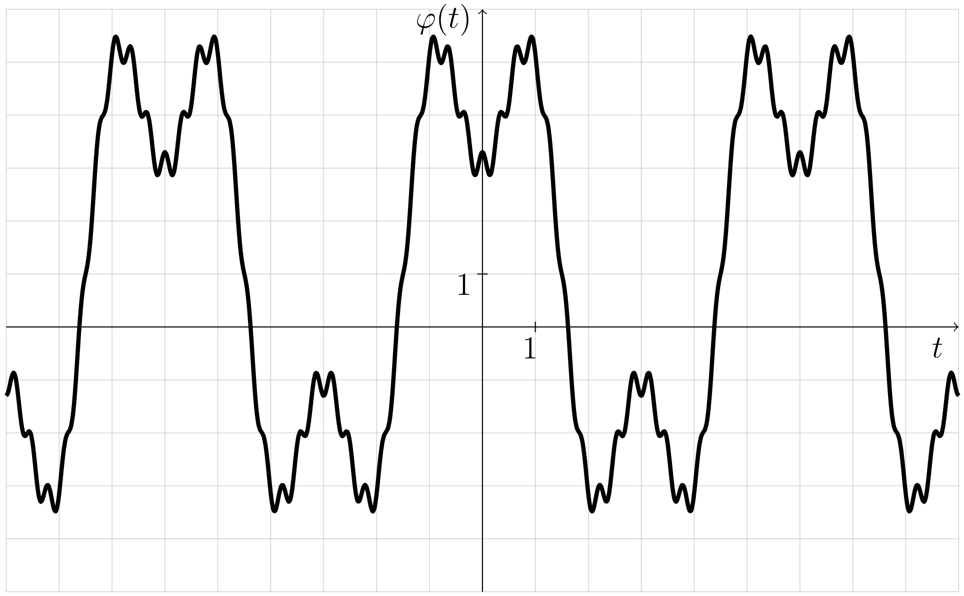
Deux primitives :

$$\int t^3\cos(at)\mathrm{d}t = \frac{(3a^2t^2-6)\cos(at)}{a^4} + \frac{(a^2t^3-6t)\sin(at)}{a^3},$$

$$\int t^3\sin(at)\mathrm{d}t = \frac{(3a^2t^2-6)\sin(at)}{a^4} - \frac{(a^2t^3-6t)\cos(at)}{a^3}.$$

Exercice 2

Soit φ la fonction périodique dont le graphe est donné ci-dessous. On précise que son spectre ne contient que quatre termes non nuls.



Préciser sa période, décrire φ en termes de fréquences et déterminer approximativement les valeurs de ses quatre coefficients de Fourier.

Exercice 3

Comparer les signaux g_1, g_2 et g_3 au signal g en raisonnant sur leurs spectres : qu'ont-ils en commun ? Qu'est-ce qui les distingue ?