Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 6-3-3.

Exercice 1

Soit f la fonction 4-périodique définie sur $]-2,2[$ par $f(t)=\frac{t^3}{2}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier réels a_n et b_n de f et donner sa série de Fourier.

   La fonction f est impaire, donc ses coefficients a_0 et a_n sont tous nuls.
   En utilisant la parité de f, les coefficients b_n sont donnés par

$$b_n=\frac{4}{4}\int_0^2\frac{t^3}{2}\sin(n\frac{2\pi}{4}t)\mathrm{d}t=\left[\frac{(3\frac{n^2\pi^2}{4}t^2-6)\sin(n\frac{\pi}{2}t)}{n^4\pi^4/8}-\frac{(\frac{n^2\pi^2}{4}t^3-6t)\cos(n\frac{\pi}{2}t)}{n^3\pi^3/4}\right]_0^2$$

$$b_n=-4\frac{(2n^2\pi^2-12)(-1)^n}{n^3\pi^3}.$$

   Ainsi la série de Fourier de f est donnée par

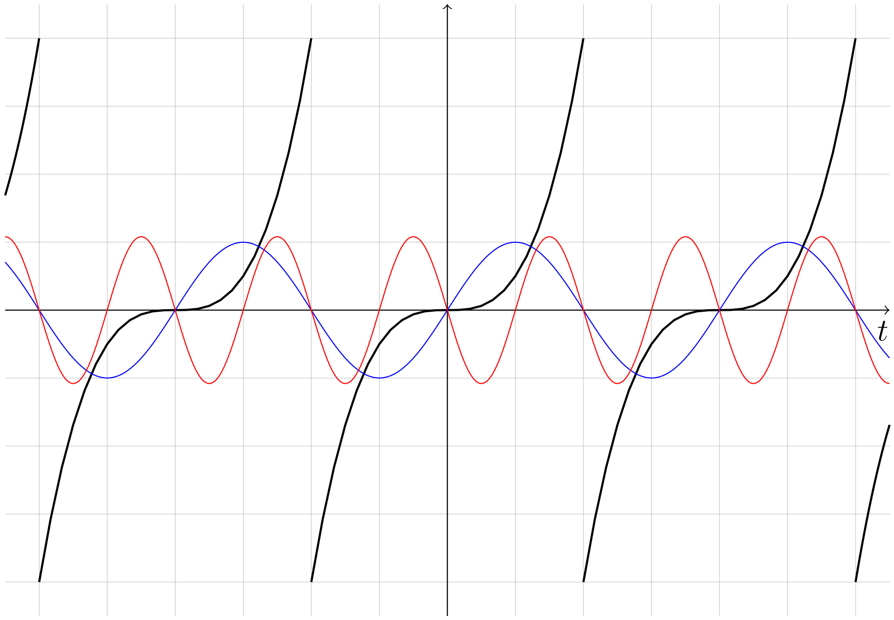
$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}8(-1)^{n+1}\frac{n^2\pi^2-6}{n^3\pi^3}\sin(n\tfrac{\pi}{2}t).$$

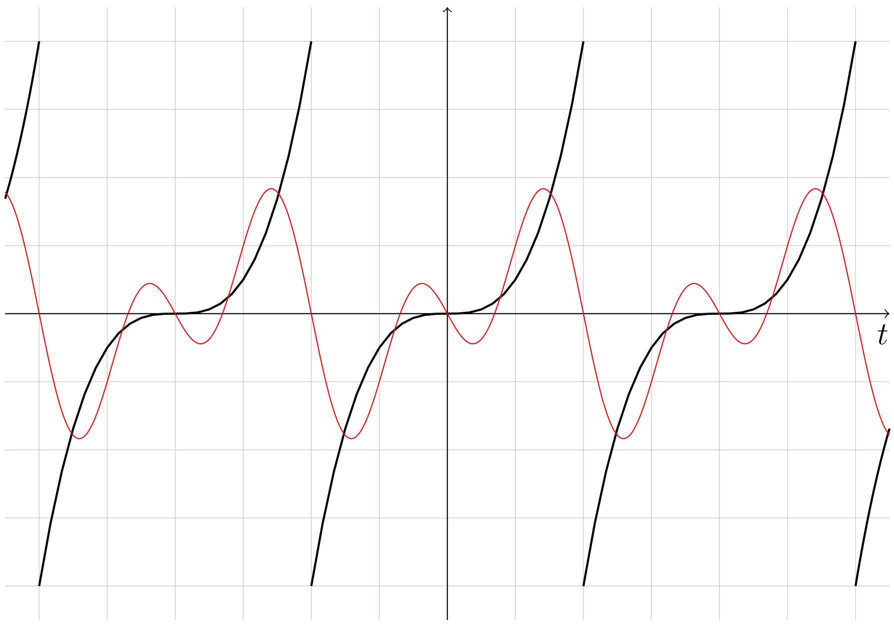
2. Quel est l'ordre de grandeur des coefficients lorsque n tend vers $+\infty$? Commenter.

   Les coefficients b_n sont équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, à $8(-1)^{n+1}\frac{n^2\pi^2}{n^3\pi^3}=\frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi}$. Ils sont donc de l'ordre de $\frac{1}{n}$. La convergence de a série n'est donc pas très rapide ce qui n'est pas surprenant car f n'est pas une fonction continue.

3. Donner des valeurs approchées des coefficients b_1 et b_2.
   Représenter sur le graphe ci-dessous les fonctions $S_1 : t\mapsto b_1\sin(\frac{\pi}{2}t)$
   et $S_2 : t\mapsto b_1\sin(\frac{\pi}{2}t)+b_2\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}t)$.

   En considérant que $\pi^2\approx 10$ et $\pi^3\approx 30$, $b_1=8\frac{\pi^2-6}{\pi^3}\approx\frac{32}{30}\approx 1$. Et $b_2=-8\frac{4\pi^2-6}{8\pi^3}\approx -\frac{8\cdot 34}{240}\approx -1$.
   On représente en bleu la fonction S_1 et en rouge la fonction $t\mapsto b_2\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}t)$. On somme les deux plus bas pour obtenir S_2.





Rappels : coefficients de Fourier d'une fonction f T-périodique :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\tfrac{2\pi}{T}t)\mathrm{d}t.$$

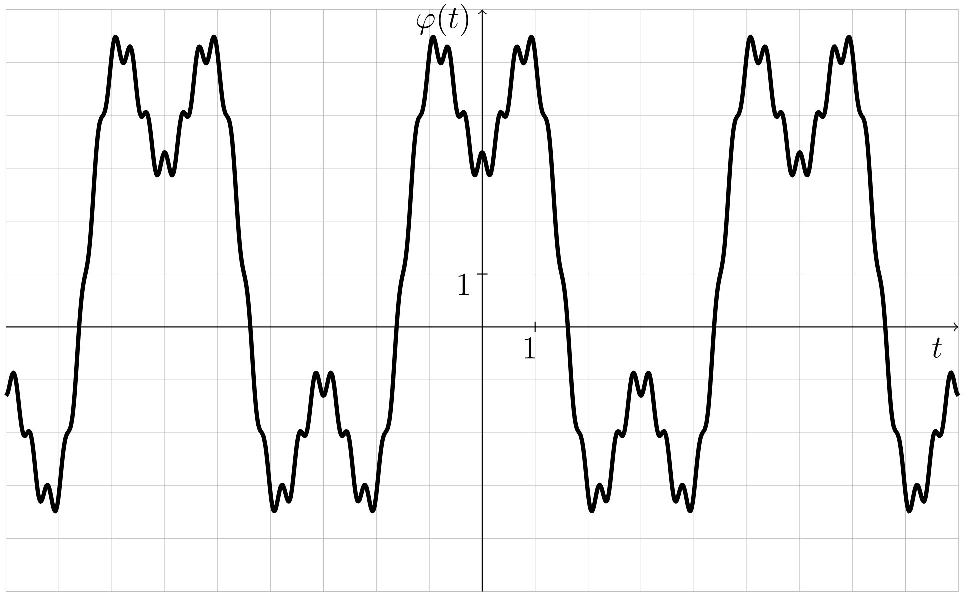
Deux primitives :

$$\int t^3\cos(at)\mathrm{d}t = \frac{(3a^2t^2-6)\cos(at)}{a^4} + \frac{(a^2t^3-6t)\sin(at)}{a^3},$$

$$\int t^3\sin(at)\mathrm{d}t = \frac{(3a^2t^2-6)\sin(at)}{a^4} - \frac{(a^2t^3-6t)\cos(at)}{a^3}.$$

Exercice 2

Soit φ la fonction périodique dont le graphe est donné ci-dessous. On précise que son spectre ne contient que quatre termes non nuls.



Préciser sa période, décrire φ en termes de fréquences et déterminer approximativement les valeurs de ses quatre coefficients de Fourier.

La fonction φ est 6-périodique. Sa valeur moyenne est $a_0 \approx 1$.

Le signal est ensuite composé de trois fréquences : une fréquence fondamentale très forte, une autre basse fréquence qui empêche le signal de ressembler à une simple sinusoïde et une haute fréquence faible visible dans les petites oscillations. Notons également que la fonction est paire, elle ne sera constituée que de cosinus.

Autour de la moyenne 1, la fonction oscille globalement entre -3 et 5. Il s'agit essentiellement de l'oscillation de la fondamentale. On peut donc estimer que $a_1 \approx 4$.

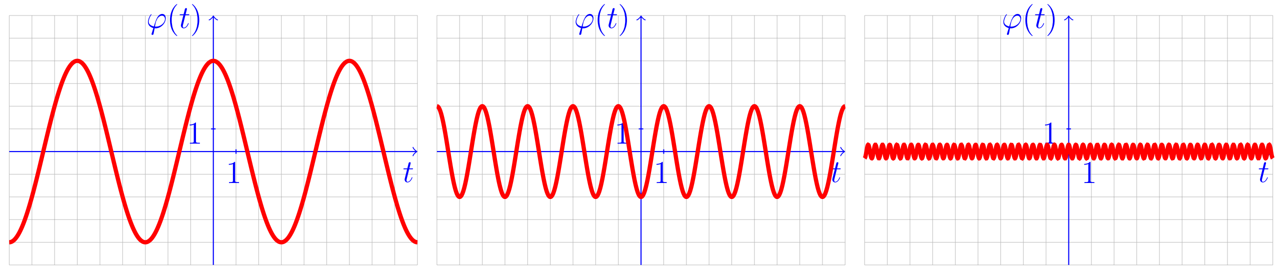
S'ajoute à cela une fonction qui oscille 3 fois plus vite (il y a trois oscillations par période). Si on observe les zones où le premier terme est maximal, on mesure que l'amplitude de ce terme est de l'ordre de 1. Plus précisément, on note qu'en 0, ce terme a fait diminuer la fondamentale de 2 unités. On estime $a_3 \approx -2$ (cette valeur est difficile à estimer graphiquement, mais on peut au moins dire qu'elle est située entre -3 et -1).

Reste enfin la haute fréquence. Déterminer le nombre de petites oscillations par période n'est pas simple car elles sont presque invisibles à certains endroit de la courbe et se mélangent un peu avec les oscillations du terme précédent. En tenant compte des oscillations presque imperceptibles, on compte 19 oscillations par période. Leur amplitude est de l'ordre de 0,5 maximum, sans doute un peu moins. On estime ainsi $a_{19} \approx 0,5$ (en regardant la courbe en 0, on peut deviner que le signe est positif).

Conclusion :

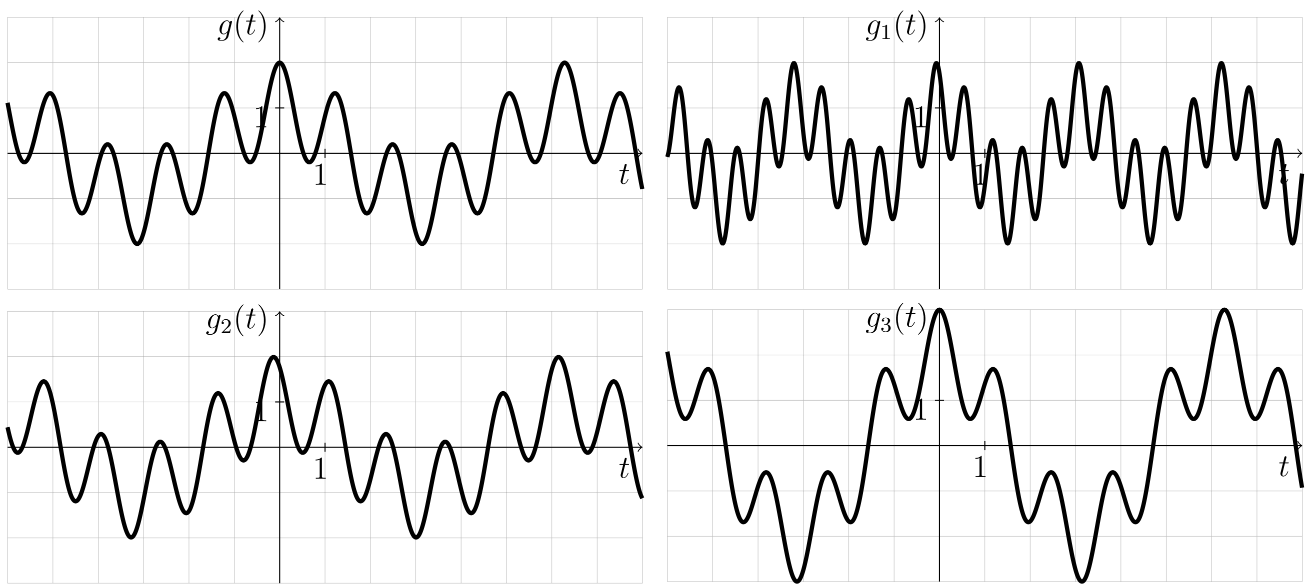
$$\varphi(t) \approx 1 + 4\cos(\tfrac{2\pi}{6}t) - 2\cos(3\tfrac{2\pi}{6}t) + 0,5\cos(19\tfrac{2\pi}{6}t).$$

Ainsi φ est la somme de la fonction constante 1 et des fonctions ci-dessous :



Exercice 3

Comparer les signaux g_1, g_2 et g_3 au signal g en raisonnant sur leurs spectres : qu'ont-ils en commun ? Qu'est-ce qui les distingue ?



Commençons par analyser la fonction g : elle est de moyenne nulle et est composée d'une basse fréquence d'amplitude 2 et d'une haute fréquence (5 fois la fondamentale) d'amplitude 1.

La fonction g_1 ressemble beaucoup à g mais oscille deux fois plus vite. Son spectre est le même que celui de g avec des fréquences doubles. Si on regarde bien, elle n'a pas exactement la même allure que g mais nous allons voir cela ensuite.

la fonction g_2 semble identique à g mais on observe tout de même un léger décalage. En regardant bien, on constate que la fondamentale de g_1 est synchronisée avec celle de g, il n'y pas de décalage entre elles. C'est donc la haute fréquence qui est légèrement déphasée par rapport à celle de g. Les spectres des deux fonctions sont donc identiques en valeur absolue, mais leurs harmoniques sont déphasés. On retrouve ce déphasage dans la fonction g_1.

La fonction g_3 a clairement une amplitude plus élevée que celle de g et son allure globale ne ressemble pas tout à fait à celle de g. Mais sa décomposition est du même type : une fondamentale de même fréquence que celle de g mais d'amplitude 3, et une haute fréquence identique à celle de g. Ainsi seules les amplitudes des fondamentales de g et g_3 diffèrent.