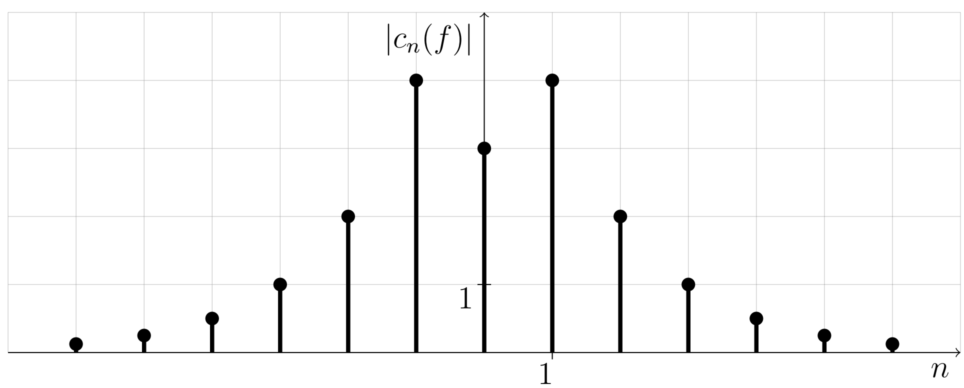
Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 15-5.

Exercice 1

Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que les coefficients de Fourier complexes de sa dérivée f' satisfont
$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$
2. On décompose f en série de Fourier : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.
Retrouver le résultat précédent en s'autorisant à dériver sous le signe somme.
3. Soit f la fonction dont le spectre est représenté ci-dessous (en module).

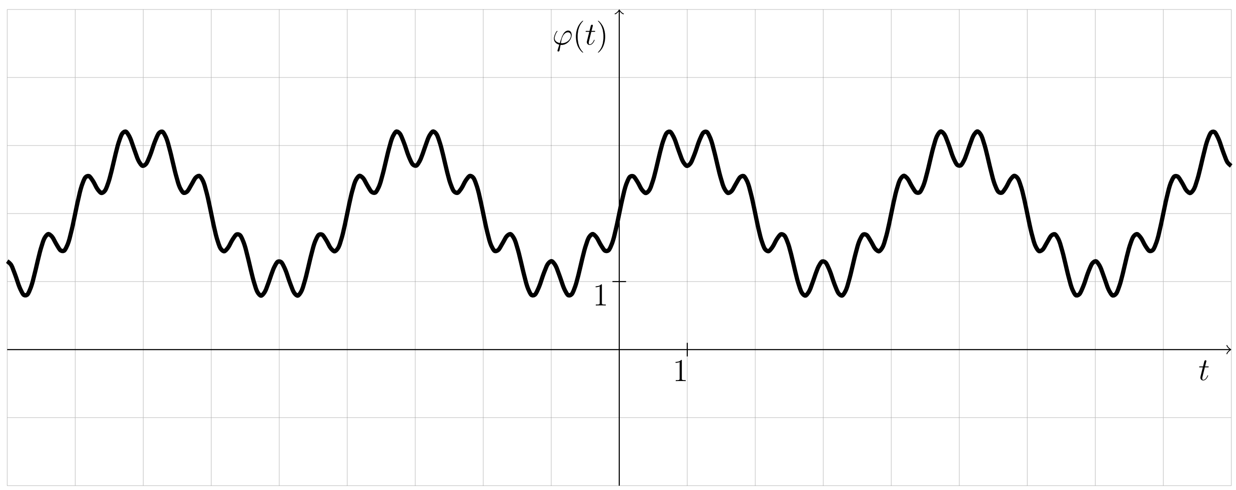


Représenter l'allure du spectre de sa dérivée f'. Comment sont transformées les basses et les hautes fréquences de f lorsqu'on la dérive ? Proposer une explication.
4. On considère la fonction g 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $g(t) = t$. Calculer ses coefficients de Fourier complexes.
5. L'égalité $c_n(g') = \mathrm{i}nc_n(g)$ est-elle satisfaite ? Expliquer.
6. Soit h la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $h(t) = \frac{t^2}{2}$.
À l'aide du résultat de la question 1, déterminer les coefficients de Fourier de h à partir des coefficients de Fourier de g.

Rappels : coefficients de Fourier complexes d'une fonction f 2π-périodique :
$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Soit φ la fonction périodique dont le graphe est donné ci-dessous.



Donner sa période, décrire φ en termes de fréquences et déterminer approximativement les valeurs de ses coefficients de Fourier.