Corrigé du contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 15-5.

Exercice 1

Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que les coefficients de Fourier complexes de sa dérivée f' satisfont

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$

Les coefficients de f' sont définis par

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$$

Avec une intégration par parties :

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\left([f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -f(t)\mathrm{i}n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left((-1)^n f(\pi) - (-1)^n f(\pi) + \mathrm{i}n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right).$$

Comme f est 2π-périodique et continue, $f(\pi) = f(-\pi)$ (la continuité est nécessaire sinon on obtiendrait $f(\pi^-) - f(-\pi^+) \neq 0$). Donc

$$c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$

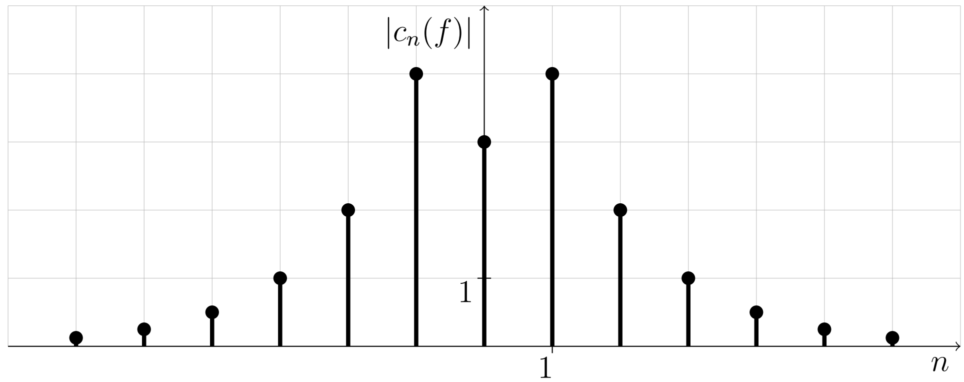
2. On décompose f en série de Fourier : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.
Retrouver le résultat précédent en s'autorisant à dériver sous le signe somme.

Dérivons f et sa série de Fourier :

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{i}n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

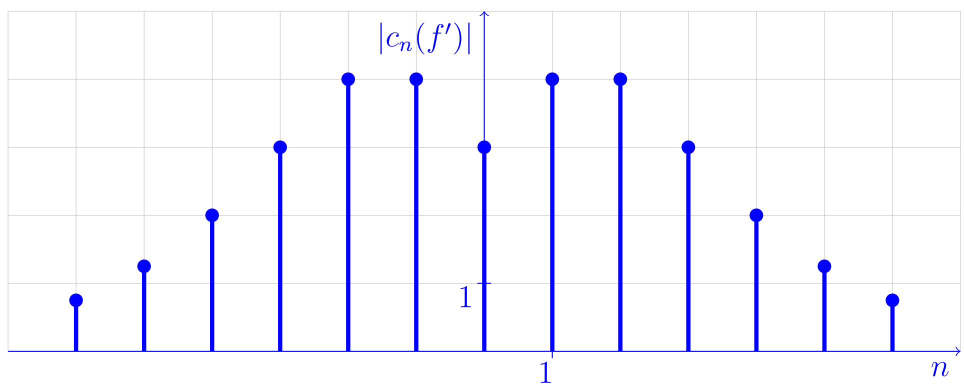
Cette nouvelle série est encore une série de Fourier dont les coefficients sont les $\mathrm{i}nc_n(f)$. Il s'agit de la série de Fourier de f' et ses coefficients sont donc égaux à $c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f)$.

3. Soit f la fonction dont le spectre est représenté ci-dessous (en module).



Représenter l'allure du spectre de sa dérivée f'. Comment sont transformées les basses et les hautes fréquences de f lorsqu'on la dérive ? Proposer une explication.

En module, on obtient $|c_0(f')| = 0$, $|c_1(f')| = |c_1(f)|$, $|c_2(f')| = |2c_2(f)|$, $|c_3(f')| = |3c_3(f)|$, etc. Lorsqu'on dérive f, on amplifie ses coefficients, et on les amplifie d'autant plus que n est grand : les basses fréquences sont peu amplifiées et les hautes fréquences sont très amplifiées.



4. On considère la fonction g 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $g(t) = t$. Calculer ses coefficients de Fourier complexes.

Calculons :

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{d}t = 0.$$

Et pour $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left([t\tfrac{1}{-\mathrm{i}n}e^{-\mathrm{i}nt}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right)$$

$$c_n(g) = \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n}.$$

Ainsi, la série de g est

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

5. L'égalité $c_n(g') = \mathrm{i}nc_n(g)$ est-elle satisfaite ? Expliquer.

   La fonction g est dérivable, en dehors des points de la forme $k\pi$ avec k impair, et sa dérivée est égale à 1. D'après la formule, on devrait avoir $c_n(g') = \mathrm{i}nc_n(g) = -(-1)^n$. Cela est impossible car des coefficients de Fourier convergent vers 0 en ∞. Et on aurait $g'(t) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -(-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, ce qui n'a aucun sens.
   La formule n'est donc pas satisfaite. La raison est que g ne satisfait pas nos hypothèses, elle n'est pas continue sur $\mathbf{R}$.

6. Soit h la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $h(t) = \frac{t^2}{2}$.
   À l'aide du résultat de la question 1, déterminer les coefficients de Fourier de h à partir des coefficients de Fourier de g.

   La fonction h est une primitive de g. Elle satisfait les hypothèses de la question 1, donc ses coefficients vérifient : $c_n(h') = \mathrm{i}nc_n(h)$. Donc

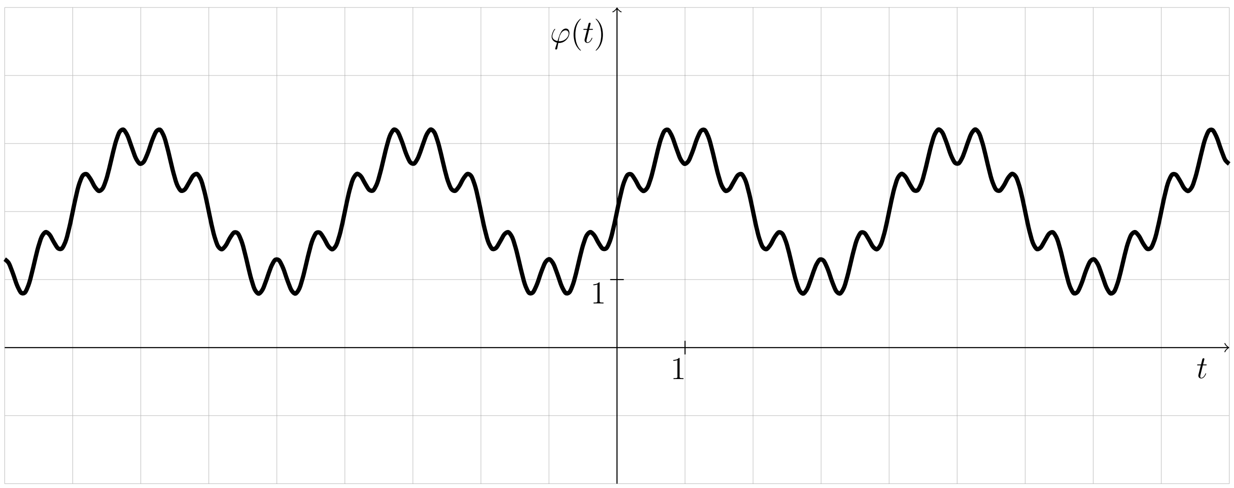
$$c_n(h) = \frac{c_n(g)}{\mathrm{i}n} = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Rappels : coefficients de Fourier complexes d'une fonction f 2π-périodique :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Soit φ la fonction périodique dont le graphe est donné ci-dessous.



Donner sa période, décrire φ en termes de fréquences et déterminer approximativement les valeurs de ses coefficients de Fourier.

La fonction φ est 4-périodique. sa valeur moyenne vaut approximativement $a_0 \approx 2$. Autour de cette valeur, φ est impaire. Elle est constituée d'une basse fréquence d'amplitude $b_1 \approx 1$ et d'une haute fréquence : on observe 7 oscillations par période d'amplitude $b_7 \approx 0,3$. Finalement

$$\varphi(t) \approx 2 + \sin(\tfrac{2\pi}{4}t) + 0,3\sin(7\tfrac{2\pi}{4}t).$$